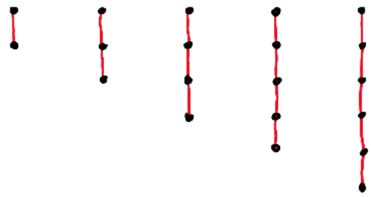
Problem des Monats · Februar 2022

LÖSUNG

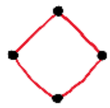
Aufgabe 1: (Von der Zahl zum Diagramm) Folgende Hasse-Diagramme können auftreten (in Klammern stehen die zugehörigen Zahlen):

- Punkt: (1)

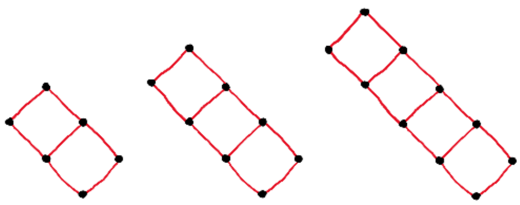
- In Reihe:
   i. Zwei Punkte: alle Primzahlen
   ii. Drei Punkte: Primzahlquadrate (4, 9, 25, 49)
   iii. Vier Punkte: Primzahlkuben (8,27)
   iv. Fünf Punkte: (16)
   v. Sechs Punkte: (32)



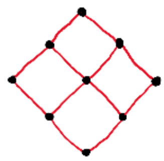
- Quadrat: Produkt aus zwei unterschiedlichen Primzahlen (6, 10, 14, 15, 21, 22, 26, 33, 34, 35, 38, 39, 45, 46, 51, 55, 57, 58)



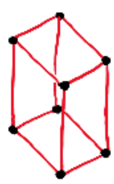
- Quadrate in Reihe:
   i. Zwei Quadrate: Produkt aus einer Primzahl und einem Primzahlquadrat (12, 18, 20, 28, 44, 50, 52, 54)
   ii. Drei Quadrate: (24, 40)
   iii. Vier Quadrate: (48)

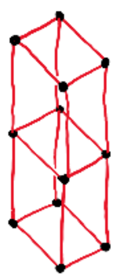


- Quadratparkett: Produkt aus zwei Primzahlquadraten (36, 56)

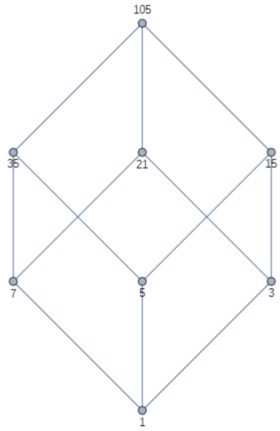
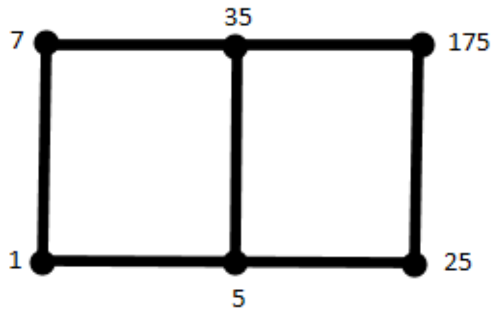
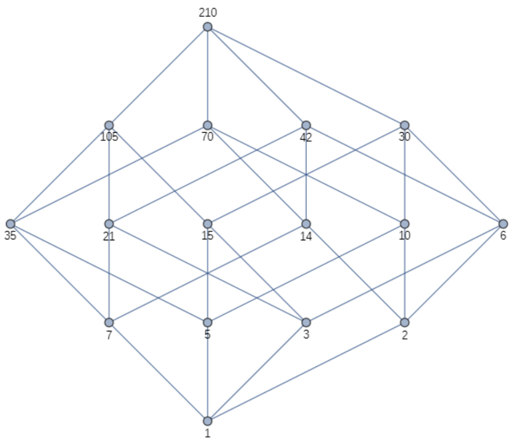
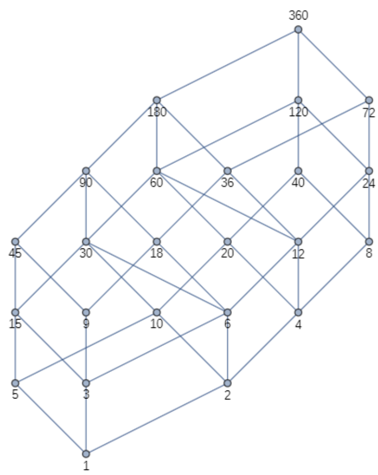


- Würfel: Produkt aus drei unterschiedlichen Primzahlen (30, 42)
- Würfel, die mit benachbarten Würfeln eine gemeinsame Fläche haben
   i. Zwei Würfel: (60)





Aufgabe 2:

Zahl	Hasse-Diagramm
105 $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ ($\rightarrow$ Produkt aus drei unterschiedlichen Primzahlen)	
175 $175 = 5 \cdot 5 \cdot 7$ ($\rightarrow$ Produkt aus Primzahlquadrat und Primzahl)	
210 $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$	
360 $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$	

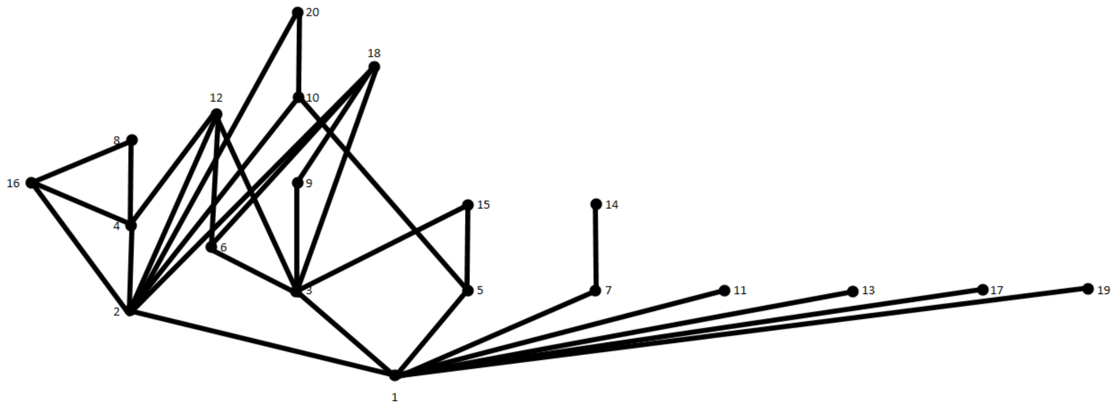
Aufgabe 3:

Hier gilt es, die Erkenntnisse aus Aufgabe 1 einzusetzen und verschieden komplexe Lösungen zu finden.
Insbesondere kann auf die Teileranzahl einer Zahl eingegangen werden:

- 4 Teiler -> Quadrat
- 6 Teiler -> 2 Quadrate
- 12 Teiler -> 2 Würfel oder 5 linear verkettete Quadrate

Aufgabe 4: (Hasse-Diagramme ineinander)

Geschachteltes Hasse-Diagramm der Zahlen bis 20:



Vertiefende Fragestellungen:

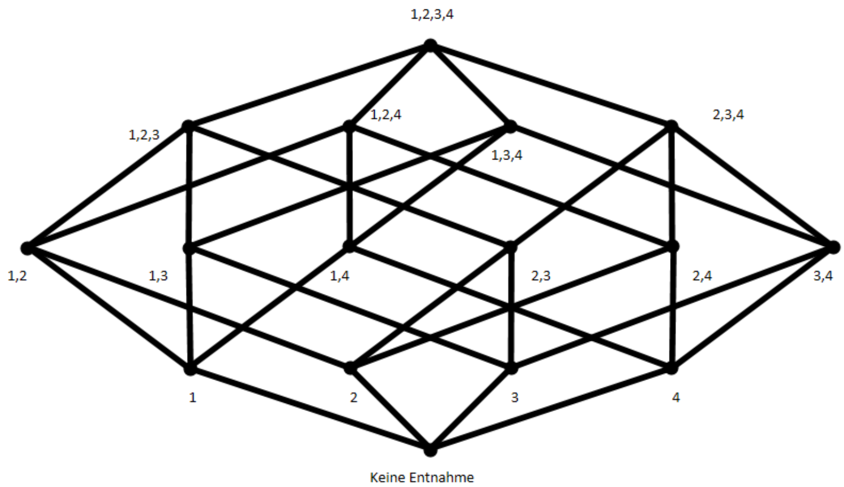
- **Wege im Diagramm:**

Wie viele verschiedene Wege gibt es, um in einem HASSE-Diagramm vom Anfang 1 bis zum Endpunkt *n* zu gelangen? Bestimme die Anzahl der Wege an den Beispielen aus Aufgabe 1 und 2.

- Beispiel: Hasse-Diagramm der Zahl 175:
  Es gibt 3 Wege: 1-5-25-175, 1-5-35-175 oder 1-7-35-175
- Vertiefung bzgl. Graphentheorie und Kombinatorik möglich

- **Diagramm mit allen Teilmengen einer Menge (Sek2):**

HASSE-Diagramme in anderem Kontext: Gegeben sei eine Menge M mit n Elementen (z.B. Kugeln in einer Urne): $M = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$. Welche Entnahmen sind beim Zug aus dieser Menge M möglich, wenn auch mehrere Elemente (bis zu n Elemente) gezogen werden können? Stelle es am Beispiel für $n = 4$ dar.



Methodisch-didaktische Überlegungen:

- **Grundsätzliches zu Primzahlen, Teilermengen und Primfaktorzerlegung** sollte vorweg oder währenddessen geklärt werden
- **Basteln** von Hasse-Diagrammen mit Zahnstochern und Knete ermöglicht Anschaulichkeit
- **Adaption** auf Thematik der Oberstufe: Zerlegung eines Polynoms in irreduzible Faktoren.