





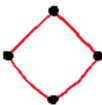
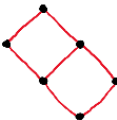
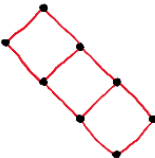
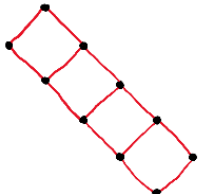
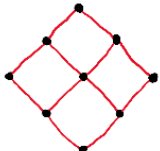
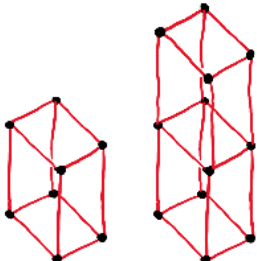
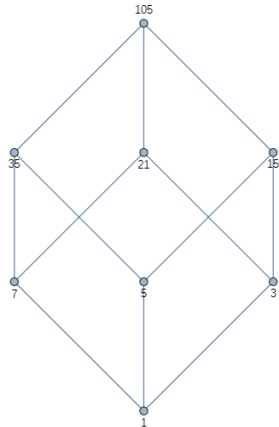
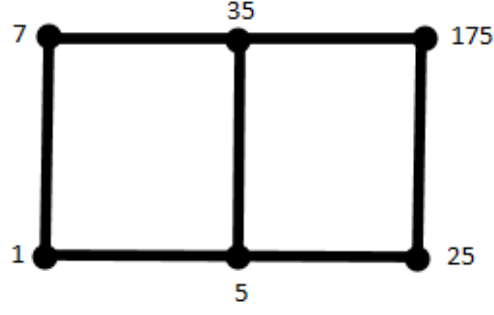
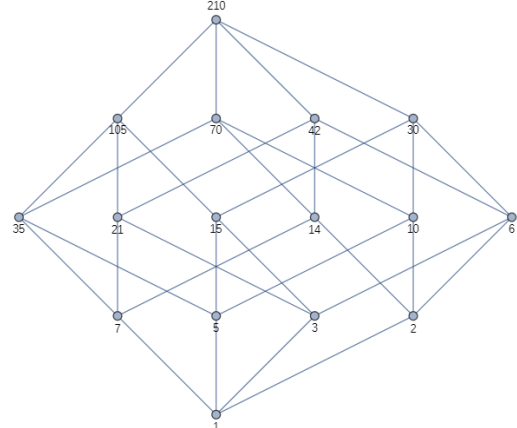
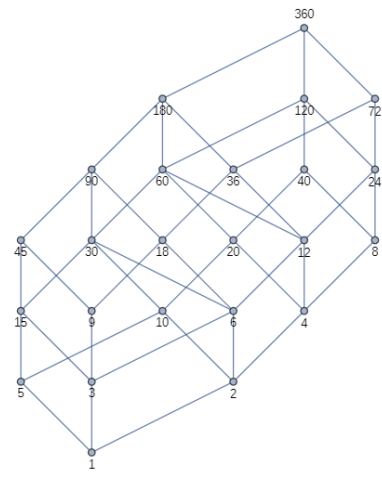


LÖSUNG

Aufgabe 1: (Von der Zahl zum Diagramm) Folgende Hasse-Diagramme können auftreten (in Klammern stehen die zugehörigen Zahlen):

- Punkt: (1) 
- In Reihe:
 - i. Zwei Punkte: alle Primzahlen 
 - ii. Drei Punkte: Primzahlquadrate (4, 9, 25, 49) 
 - iii. Vier Punkte: Primzahlkuben (8,27) 
 - iv. Fünf Punkte: (16) 
 - v. Sechs Punkte: (32) 
- Quadrat: Produkt aus zwei unterschiedlichen Primzahlen (6, 10, 14, 15, 21, 22, 26, 33, 34, 35, 38, 39, 45, 46, 51, 55, 57, 58) 
- Quadrate in Reihe:
 - i. Zwei Quadrate: Produkt aus einer Primzahl und einem Primzahlquadrat (12, 18, 20, 28, 44, 50, 52, 54) 
 - ii. Drei Quadrate: (24, 40) 
 - iii. Vier Quadrate: (48) 
- Quadratparkett: Produkt aus zwei Primzahlquadraten (36, 56) 
- Würfel: Produkt aus drei unterschiedlichen Primzahlen (30, 42)
- Würfel, die mit benachbarten Würfeln eine gemeinsame Fläche haben
 - i. Zwei Würfel: (60) 

Aufgabe 2:

Zahl	Hasse-Diagramm
<p>105</p> <p>$105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ (→ Produkt aus drei unterschiedlichen Primzahlen)</p>	 <p>The diagram shows a lattice structure starting from 1 at the bottom. The first level has nodes 3, 5, and 7. The second level has nodes 15 (3*5), 21 (3*7), and 35 (5*7). The top node is 105 (3*5*7). Edges connect 1 to 3, 5, 7; 3 to 15, 21; 5 to 15, 35; 7 to 21, 35; 15 to 105; 21 to 105; 35 to 105.</p>
<p>175</p> <p>$175 = 5 \cdot 5 \cdot 7$ (→ Produkt aus Primzahlquadrat und Primzahl)</p>	 <p>The diagram shows a lattice structure starting from 1 at the bottom. The first level has nodes 5 and 7. The second level has nodes 25 (5*5) and 35 (5*7). The top node is 175 (5*5*7). Edges connect 1 to 5, 7; 5 to 25, 35; 7 to 35; 25 to 175; 35 to 175.</p>
<p>210</p> <p>$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$</p>	 <p>The diagram shows a complex lattice structure starting from 1 at the bottom. The first level has nodes 2, 3, 5, 7. The second level has nodes 6 (2*3), 10 (2*5), 14 (2*7), 15 (3*5). The third level has nodes 21 (3*7), 30 (2*3*5), 42 (2*3*7), 70 (2*5*7). The top node is 210 (2*3*5*7). Edges connect 1 to 2, 3, 5, 7; 2 to 6, 10, 14; 3 to 6, 15, 21; 5 to 10, 15, 35; 7 to 14, 21, 49; 6 to 42; 10 to 30; 14 to 42; 15 to 30, 105; 21 to 42, 105; 30 to 210; 42 to 210; 105 to 210.</p>
<p>360</p> <p>$360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$</p>	 <p>The diagram shows a complex lattice structure starting from 1 at the bottom. The first level has nodes 2, 3, 4, 5. The second level has nodes 6 (2*3), 8 (2*2*2), 10 (2*5), 12 (2*2*3). The third level has nodes 18 (2*3*3), 20 (2*2*5), 24 (2*2*2*3), 30 (2*3*5). The fourth level has nodes 36 (2*2*3*3), 40 (2*2*2*5), 60 (2*2*3*5), 72 (2*2*2*3*3). The top node is 360 (2*2*2*3*3*5). Edges connect 1 to 2, 3, 4, 5; 2 to 6, 8, 10; 3 to 6, 12, 18; 4 to 8, 12, 20; 5 to 10, 20, 30; 6 to 18, 30; 8 to 24; 10 to 30; 12 to 24, 36; 18 to 36; 20 to 30, 60; 24 to 36, 72; 30 to 60, 180; 36 to 72; 60 to 360; 72 to 360; 180 to 360; 360 to 360.</p>

Aufgabe 3:

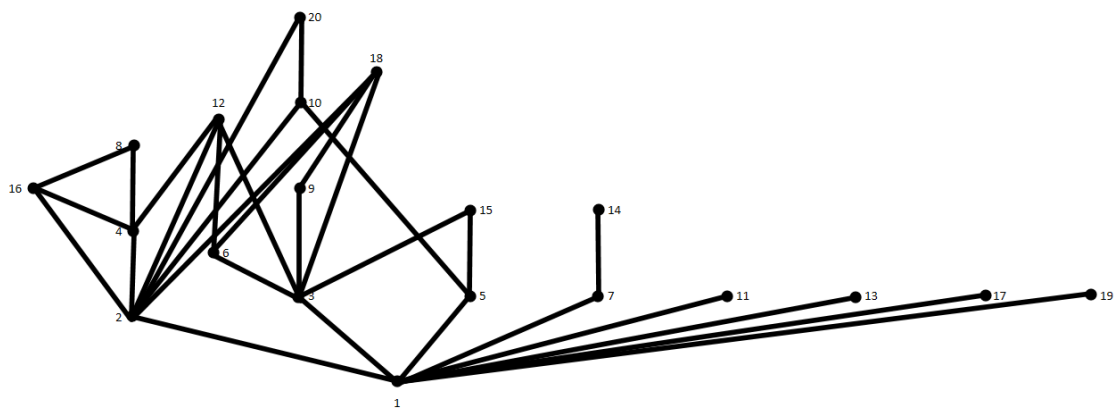
Hier gilt es, die Erkenntnisse aus Aufgabe 1 einzusetzen und verschieden komplexe Lösungen zu finden.

Insbesondere kann auf die Teileranzahl einer Zahl eingegangen werden:

- 4 Teiler -> Quadrat
- 6 Teiler -> 2 Quadrate
- 12 Teiler -> 2 Würfel oder 5 linear verkettete Quadrate

Aufgabe 4: (Hasse-Diagramme ineinander)

Geschachteltes Hasse-Diagramm der Zahlen bis 20:



Vertiefende Fragestellungen:

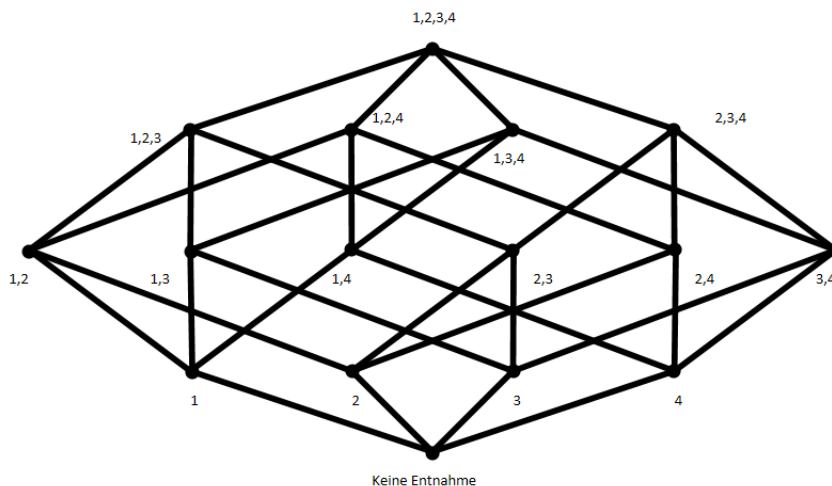
- **Wege im Diagramm:**

Wie viele verschiedene Wege gibt es, um in einem HASSE-Diagramm vom Anfang 1 bis zum Endpunkt n zu gelangen? Bestimme die Anzahl der Wege an den Beispielen aus Aufgabe 1 und 2.

- Beispiel: Hasse-Diagramm der Zahl 175:
Es gibt 3 Wege: 1-5-25-175, 1-5-35-175 oder 1-7-35-175
- Vertiefung bzgl. Graphentheorie und Kombinatorik möglich

- **Diagramm mit allen Teilmengen einer Menge (Sek2):**

HASSE-Diagramme in anderem Kontext: Gegeben sei eine Menge M mit n Elementen (z.B. Kugeln in einer Urne): $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Welche Entnahmen sind beim Zug aus dieser Menge M möglich, wenn auch mehrere Elemente (bis zu n Elemente) gezogen werden können? Stelle es am Beispiel für $n = 4$ dar.



Methodisch-didaktische Überlegungen:

- **Grundsätzliches zu Primzahlen, Teilmengen und Primfaktorzerlegung** sollte vorweg oder währenddessen geklärt werden
- **Basteln** von Hasse-Diagrammen mit Zahnstochern und Knete ermöglicht Anschaulichkeit
- **Adaption** auf Thematik der Oberstufe: Zerlegung eines Polynoms in irreduzible Faktoren.