LÖSUNG

Lösungshinweise

a) Annis Tocktick-Account folgen jede Woche 7 neue Personen. Damit hat sie nach 12 Wochen $34 + 7 \cdot (12 - 1) = 111$ Follower.

b)

> Wenn man Zahlen in einer festen Reihenfolge betrachtet, spricht man von einer Zahlenfolge oder auch nur **Folge**. Notiert werden die Zahlen so: (a_1, a_2, a_3, ⋯) oder auch (a_n). a_1 bezeichnet dabei die erste Zahl, a_2 die zweite Zahl usw. Die einzelnen Zahlen nennt man **Folgenglieder**. Die kleine tiefgestellte Zahl nummeriert die Folgenglieder. Man sagt: *„a_{37} ist das 37. Glied der Folge (a_n) und a_n ist das n-te Folgenglied.“*

c) $a_1 = 34$ und $a_{n+1} = a_n + 7$

d) $a_n = 34 + (n-1) \cdot 7$ oder $a_n = 27 + 7n$

mögliche Ergänzungen:

Annis Followerzahlen ergeben eine eine arithmetische Folge

> *Bei einer arithmetischen Folge $\langle a_n \rangle$ ist die Differenz d zweier aufeinander folgender Glieder immer gleich groß:*
> $a_2 - a_1 = d, \quad a_3 - a_2 = d, \quad a_4 - a_3 = d, \quad \cdots, \quad a_{n+1} - a_n = d, \quad n \geq 1.$
> *Damit ergibt sich als rekursive Darstellung:* $a_{n+1} = a_n + d$
> *und als explizite Darstellung:* $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$.

Zur Weiterarbeit an arithmetischen Folgen können die folgenden Aufgaben genutzt werden:

Aufgabe

Eine arithmetische Folge enthält die beiden Folgenglieder $a_{11} = 2$ und $a_{27} = 10$.

(1) Gib ein Bildungsgesetz der Folge in expliziter Darstellung und in rekursiver Darstellung an.
(2) Berechne das 86. Folgenglied.
(3) Welches Folgenglied hat den Wert 23?
(4) Überlege dir weitere arithmetische Folgen und entsprechende Fragestellungen dazu.

Lösung:

(1) Vom 11. Folgenglied bis zum 27. Folgenglied sind es insgesamt 27 – 11 = 16 Schritte.

Da es sich um eine arithmetische Folge handelt, gilt:
$a_{27} = a_{11} + 16 \cdot d \quad \Leftrightarrow d = \frac{a_{27} - a_{11}}{16} = 0{,}5.$

Mit der Differenz d können wir das erste Folgenglied berechnen:
$a_{11} = a_1 + 10 \cdot d \quad \Leftrightarrow \; a_1 = a_{11} - 10 \cdot d = -3.$

Explizite Darstellung: $a_n = -3 + (n-1) \cdot 0{,}5$
Rekursive Darstellung: $a_1 = -3;\; a_{n+1} = a_n + 0{,}5,\; n \geq 1.$

(2) $a_{86} = a_1 + 85 \cdot d = -3 + 85 \cdot 0{,}5 = 39{,}5.$

(3) Wir lösen die Gleichung $a_n = 23$ nach n auf:

$$-3 + (n-1) \cdot 0{,}5 = 23 \;\Leftrightarrow\; (n-1) \cdot 0{,}5 = 26 \;\Leftrightarrow\; n = 53.$$

Es gilt also $a_{53} = 23$. Das 53. Folgenglied hat den Wert 23.

(4) Individuelle Lösungen.

e) Sind endlich viele Zahlen angegeben, können unterschiedliche logische Zusammenhänge gefunden werden. Die Antworten sind nicht zwangsläufig eindeutig.

Bela: Zum Vorgänger werden abwechselnd 21 und 35 addiert
Can: Der Vorgänger wird verdoppelt und dann 2 subtrahiert.
Dörtje: Der Vorgänger wird mit 2 multipliziert.

mögliche Ergänzungen:
Bei Dörtje kann das Gebiet der geometrischen Folgen erschlossen werden. Aufgabenstellungen aus dem Bereich der geometrischen Zahlenfolgen könnten sich z.B. auf Wachstumsprozesse beziehen.

Ab Klasse 8:
- Endlich viele Folgenglieder einer beliebigen arithmetischen Folge sollen summiert werden. Finde eine allgemeine Darstellung für diese Summe.

Lösung:
Hier ergeben sich Formeln für endliche Reihen der Form
$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$

Für die Folge aus der Aufgabe wäre das

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (34 + (n-1) \cdot 7)$$

$$= 34 + (34 + 7) + (34 + 2 \cdot 7) + \cdots + (34 + (n-1) \cdot 7)$$

$$= 34n + \left(\sum_{1}^{n-1} i\right) \cdot 7 = 34n + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot 7$$

$$= \frac{61n+7n^2}{2}$$

n	a_n	Summe bis zum n-ten Glied: $\Sigma_{i=1}^{n} a_i$
1	$a_1 = a_1$	a_1
2	$a_2 = a_1 + 1d$	$a_1 + a_2 = a_1 + a_1 + d = 2a_1 + 1d$
3	$a_3 = a_1 + 2d$	$a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 3a_1 + 3d$
4	$a_4 = a_1 + 3d$	$4a_1 + 6d$
5	$a_5 = a_1 + 4d$	$5a_1 + 10d$
6	$a_6 = a_1 + 5d$	$6a_1 + 15d$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Allgemein ist dann die Summe bis zum n-ten Glied: $n \cdot a_1 + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot d$

- Informiere dich über das Verfahren der vollständigen Induktion und beweise deine Summenformel für Annis Followerzahlen.

Lösung:

Zu beweisen ist die Aussage: $\sum_{k=1}^{n}(34 + (n-1) \cdot 7) = \frac{61n+7n^2}{2}$.

Induktionsanfang:

Für $n = 1$ gilt $\sum_{k=1}^{1}(34 + (1-1) \cdot 7) = \frac{61 \cdot 1 + 7 \cdot 1^2}{2}$

$34 = 34$ ist eine wahre Aussage.

Induktionsschritt:

Induktionsvoraussetzung:

Für eine beliebige Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n}(34 + (n-1) \cdot 7) = \frac{61n+7n^2}{2}$.

Induktionsbehauptung:

Dann gilt für $n+1$: $\sum_{k=1}^{n+1}(34 + (n-1) \cdot 7) = \frac{61(n+1)+7(n+1)^2}{2}$.

Induktionsschluss:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(34 + (n-1) \cdot 7) = \sum_{k=1}^{n}(34 + (n-1) \cdot 7) + (34 + ((n+1) - 1) \cdot 7)$$

$$= \frac{61n+7n^2}{2} + 34 + 7n \quad \text{(Einsetzen der Induktionsvoraussetzung)}$$

$$= \frac{61n+7n^2}{2} + \frac{2(34+7n)}{2} \quad \text{(Zusammenfassen der Terme)}$$

$$= \frac{61n + 7n^2 + 68 + 14n}{2}$$

$$= \frac{61n+61+7n^2+14n+7}{2}$$ (Sortieren der Summanden für die

$$= \frac{61(n+1)+7(n^2+2n+1)}{2}$$ folgenden Faktorisierungen)

$$= \frac{61(n+1) + 7(n+1)^2}{2}$$

Da $\sum_{k=1}^{n}(34 + (n-1) \cdot 7) = \frac{61n+7n^2}{2}$ für $n = 1$ wahr ist und

$\sum_{k=1}^{n}(34 + (n-1) \cdot 7) = \frac{61n+7n^2}{2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1}(34 + (n-1) \cdot 7) = \frac{61(n+1)+7(n+1)^2}{2}$ wahr ist, ist die Summenformel für Annis Zahlenfolge für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Quelle: Das Zeichen MATHEMATIK macht FREUNDE bezieht sich auf folgende Internetseite, von der wir die entsprechend markierten Stellen mit Erlaubnis übernommen haben:
Aus:
https://mmf.univie.ac.at/fileadmin/user_upload/p_mathematikmachtfreunde/Materialien/KH-Folgen_und_Reihen.pdf [zuletzt besucht am: 9.2.2022, 17:10 Uhr]

Das Kompetenzheft Folgen und Reihen, das sich mit dem Link öffnet, bietet noch viele weitere Ideen zu diesem Thema.

Anja Kühnemund, Petra Presun, · mathezirkel.hamburg@gmail.com
http://bildungsserver.hamburg.de/00-schuelerzirkel-mathe