Problem des Monats · April 2022

<u>Lösungshinweise</u>
Hier geht es um Varianten des Eulerschen Polyedersatzes.

a) Individuelle Lösungen.
Beispiele:

Beim Punkt ist E = 1, F = 0 und K = 0. Bei der Strecke ist E = 2, F = 0 und K = 1.

b) Legt man eine Tabelle an, in der die Anzahl der Ecken mit E, die Anzahl der Kanten mit K und die Anzahl der Flächen mit F bezeichnet werden, dann stellt man anhand der Beispiele recht bald den Zusammenhang **E + F – K = 1** her. In den meisten Quellen steht rechts eine 2, aber dann muss die „Außenfläche" jeder Figur, also die nicht umschlossene unendlich große Fläche, die die Figur umgibt, immer mitgedacht werden.
Die angegebene Formel funktioniert für alle angegebenen Figuren. Sie gilt nicht mehr, wenn sich Kanten überkreuzen und dabei keine Ecke (Knoten) bilden.
Der Beweis ist recht leicht einzusehen, wenn man von einer nackten Ecke ausgeht, bei der E = 1, K = 0 und F = 0 ist. Zieht man von dieser Ecke eine Kante zu einer zweiten Ecke, haben wir E = 2, K = 1 und F = 0 und wieder stimmt die Beziehung. Logischerweise geht dies immer so weiter. Haben zwei Kanten eine gemeinsame Ecke, dann „fehlt" eine Ecke, aber dafür entsteht eine Fläche, die diesen Mangel wieder ausgleicht.

c) Ja, der Zusammenhang gilt auch für diese Figuren.

d) Für diese Körper gilt der Eulersche Polyedersatz: **E + F – K = 2**

e) Der Eulersche Polyedersatz gilt für alle konvexen und auch für einige konkave Polyeder. Ein Polyeder ist ein dreidimensionaler Körper, der ausschließlich von ebenen Flächen begrenzt wird. Ein Polyeder heißt konvex, wenn für je zwei Punkte des Polyeders die Verbindungsstrecke zwischen diesen Punkten vollständig im Polyeder liegt. Die bekanntesten konvexen Polyeder sind die Platonischen Körper. Der Satz gilt jedoch auch für eine Reihe von konkaven Polyedern, wenn sich das Kantennetz des konkaven Polyeders kreuzungsfrei als zusammenhängender Kantengraph in der Ebene abbilden lässt.

Weitere Anregungen und Hintergründe zu den Lösungen findet man unter:
https://www.uibk.ac.at/mathematik/algebra/media/teaching/masterarbeit_prugger.pdf

Ein Beweis des Eulerschen Polyedersatz über vollständige Induktion findet man auch in den Lösungen zum PdM Januar 2022.

Anja Kühnemund, Petra Presun, · mathezirkel.hamburg@gmail.com
http://bildungsserver.hamburg.de/00-schuelerzirkel-mathe