LÖSUNG

Lösungshinweise

Es gibt das Spiel in einer Variante zu kaufen, in einer anderen als Preis des Känguruwettbewerbs 2011 und hier in einer dritten. Vielleicht finden die Lernenden ein kleineres Spiel noch in einer weiteren Darstellung. Das zeigt, dass es in Mathematik auf die Struktur und nicht auf die konkrete Darstellung ankommt.
Falls die Binomialkoeffizienten zu kompliziert sind, kann man die Fragen auch durch systematisches Ausprobieren und Ordnen lösen.
Die Darstellung in Geogebra kann dann wieder mit weniger formalen Voraussetzungen erledigt werden.

1. Wenn man die Anzahl nicht direkt kombinatorisch kennt, ist die vektorielle Darstellung sinnvoll, da man so auch „zu Fuß“ die Übersicht behalten kann. Es könnte also sinnvoll sein, die vektorielle Darstellung schon einzuführen.
   Für
   - n=k=1 gibt es 1 Eigenschaft und 1 Ausprägung, also 1^1=1 Karte: (0); Setgröße 1.
   - n=2, k=1: 2 Eigenschaften; 1 Ausprägung: 1^2=1 Karte: $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$; Setgröße 1
   - n=1, k=2: 1 Eigenschaft, 2 Ausprägung: 2^1=2 Karten: $(0)\ und\ (1)$; Setgröße 2
   - n=2, k=2: 2 Eigenschaften, 2 Ausprägung: 2^2=4 Karten: $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$; Setgröße 2
   - n=3, k=1: 3 Eigenschaften, 1 Ausprägung: 1^3=1 Karte: $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, Setgröße 1
   - n=3; k=2: 3 Eigenschaften, 2 Ausprägung: 2^3= 8 Karten: $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; Setgröße 2
   - n=3; k=3: 3 Eigenschaften, 3 Ausprägung: 3^3= 27 Karten:
     $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$;
     $\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$; Setgröße 3

2. Die Spielkarten sind im Anhang des PdM.

3. Die Darstellungen sind meist unter 1., es fehlt nur n=2, k = 3:

$$\binom{0}{0};\binom{0}{1};\binom{0}{2};\binom{1}{0};\binom{1}{1};\binom{1}{2};\binom{2}{0};\binom{2}{1};\binom{2}{2}; \text{ Setgröße } 3$$

4. Bei $k=1$ gibt es immer nur 1 Karte, also auch nur 1 Set.

Bei n=1, k=2 gibt es 2 Karten mit Setgröße 2, also 1 Set.

Bei n=2, k=2 bilden immer 2 Karten zusammen ein Set, also gibt es

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 2\cdot 1} = \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1} = 3\cdot 2 = 6 \text{ Sets.}$$

Bei n=2, k=3 wählt man 2 Karten aus, die dritte Karte des Sets ergibt sich dann eindeutig:

$$\{\binom{0}{0};\binom{0}{1};\binom{0}{2}\} = \{\binom{0}{0};\binom{0}{2};\binom{0}{1}\} = \{\binom{0}{1};\binom{0}{2};\binom{0}{0}\}$$
$$\{\binom{0}{0};\binom{1}{0};\binom{2}{0}\} = \{\binom{0}{0};\binom{2}{0};\binom{1}{0}\} = \{\binom{1}{0};\binom{2}{0};\binom{0}{0}\}$$
$$\{\binom{0}{0};\binom{1}{1};\binom{2}{2}\} = \{\binom{0}{0};\binom{2}{2};\binom{1}{1}\} = \{\binom{1}{1};\binom{2}{2};\binom{0}{0}\}$$
$$\{\binom{0}{0};\binom{1}{2};\binom{2}{1}\} = \{\binom{0}{0};\binom{2}{1};\binom{1}{2}\} = \{\binom{1}{2};\binom{2}{1};\binom{0}{0}\}$$

$$\{\binom{0}{1};\binom{1}{0};\binom{2}{2}\} = \{\binom{0}{1};\binom{2}{2};\binom{1}{0}\} = \{\binom{1}{0};\binom{2}{2};\binom{0}{1}\}$$
$$\{\binom{0}{1};\binom{1}{1};\binom{2}{1}\} = \{\binom{0}{1};\binom{2}{1};\binom{1}{1}\} = \{\binom{1}{1};\binom{2}{1};\binom{0}{1}\}$$
$$\{\binom{0}{1};\binom{1}{2};\binom{2}{0}\} = \{\binom{0}{1};\binom{2}{0};\binom{1}{2}\} = \{\binom{1}{2};\binom{2}{0};\binom{0}{1}\}$$

$$\{\binom{0}{2};\binom{1}{0};\binom{2}{1}\} = \{\binom{0}{2};\binom{2}{1};\binom{1}{0}\} = \{\binom{2}{1};\binom{1}{0};\binom{0}{2}\}$$
$$\{\binom{0}{2};\binom{1}{1};\binom{2}{0}\} = \{\binom{0}{2};\binom{2}{0};\binom{1}{1}\} = \{\binom{1}{1};\binom{2}{0};\binom{0}{2}\}$$
$$\{\binom{0}{2};\binom{1}{2};\binom{2}{2}\} = \{\binom{0}{2};\binom{2}{2};\binom{1}{2}\} = \{\binom{0}{2};\binom{2}{2};\binom{1}{2}\}$$

$$\{\binom{1}{0};\binom{1}{1};\binom{1}{2}\} = \{\binom{1}{0};\binom{1}{2};\binom{1}{1}\} = \{\binom{1}{1};\binom{1}{2};\binom{1}{0}\}$$

$$\{\binom{2}{0};\binom{2}{1};\binom{2}{2}\} = \{\binom{2}{0};\binom{2}{2};\binom{2}{1}\} = \{\binom{2}{1};\binom{2}{2};\binom{2}{0}\}$$

Aus 9 Karten werden 2 mit einem Griff ausgewählt, wobei durch die Anzahl der 2-elementigen Teilmengen aus einer 3-elementigen Menge dividiert werden muss, da die dritte Karte eindeutig bestimmt ist:

Es gibt also $\frac{\binom{9}{2}}{\binom{3}{2}} = \frac{\frac{9!}{2!\cdot 7!}}{\frac{3!}{2!\cdot 1!}} = \frac{9!}{2!\cdot 7!}\cdot\frac{2!}{3!} = \frac{9!}{7!\cdot 3!} = \frac{9\cdot 8}{3\cdot 2} = 3\cdot 4 = 12$ Sets.

Bei n=3, k=3 wählt man 2 Karten aus, die dritte Karte des Sets ergibt sich dann eindeutig:

Anja Kühnemund, Petra Presun, ・ mathezirkel.hamburg@gmail.com
http://bildungsserver.hamburg.de/00-schuelerzirkel-mathe

$$\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\} = \{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\} = \{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\}$$

$$\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\}=\cdots \quad \{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}\}=\cdots \quad \{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\}=\cdots$$

$$\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\}=\cdots$$

$$\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}\}=\cdots \quad \{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\}=\cdots \quad \{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}\}=\cdots$$

$$\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}\}=\cdots$$

$$\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\}=\cdots \quad \{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\}=\cdots \quad \{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\}=\cdots$$

$$\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\}=\cdots$$

$$\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\}=\cdots$$

Aus 27 Karten werden 2 mit einem Griff ausgewählt, wobei durch die Anzahl der 2-elementigen Teilmengen aus einer 3-elementigen Menge dividiert werden muss, da die dritte Karte eindeutig bestimmt ist.

Es gibt also $\frac{\binom{27}{2}}{\binom{3}{2}} = \frac{\frac{27!}{2!\cdot 25!}}{\frac{3!}{2!\cdot 1!}} = \frac{27!}{2!\cdot 25!}\cdot\frac{2!}{3!} = \frac{27!}{25!\cdot 3!} = \frac{27\cdot 26}{3\cdot 2} = 9\cdot 13 = 117$ Sets .

Im Originalspiel werden aus 81 Karten 2 mit einem Griff ausgewählt, wobei durch die Anzahl der 2-elementigen Teilmengen aus einer 3-elementigen Menge dividiert werden muss, da die dritte Karte eindeutig bestimmt ist.

Es gibt also $\frac{\binom{81}{2}}{\binom{3}{2}} = \frac{\frac{81!}{2!\cdot 79!}}{\frac{3!}{2!\cdot 1!}} = \frac{81!}{2!\cdot 79!}\cdot\frac{2!}{3!} = \frac{81!}{79!\cdot 3!} = \frac{81\cdot 80}{3\cdot 2} = 27\cdot 40 = 1080\, Sets.$

Weiterführende Aufgabenstellung:

Die Einträge in der vektoriellen Darstellung der Karten für n=3 können als Koordinaten von Punkten in einem Würfel aufgefasst werden. Welche Eigenschaften haben die Punkte eines Sets in diesem Würfel? Welche Form der Darstellung ließe sich für n=4 finden?

Lösung:

Die Karten eines Sets liegen auf einer Geraden in einem (Hyper-)Würfel. Das könnte man z.B. in Geogebra in 3D darstellen lassen. In der 3D-Darstellung könnte man die Punkte in der Farbe und in der Größe anpassen (2 Eigenschaften).

Anja Kühnemund, Petra Presun, ・ mathezirkel.hamburg@gmail.com
http://bildungsserver.hamburg.de/00-schuelerzirkel-mathe