Problem des Monats • Juni 2022

LÖSUNG

Aufgabe 1:

$\frac{2}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{20}$

$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}=\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{60}$

$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$

$\frac{2}{9}=\frac{1}{5}+\frac{1}{50}+\frac{1}{500}+\cdots$

$\frac{2}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$

$\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$

$\frac{2}{23}=\frac{1}{12}+\frac{1}{276}$

Aufgabe 2:
Jeder Zweierbruch hat mindestens eine SBZ (bei geraden Nennern: führt bereits das Kürzen zur Lösung; ansonsten lässt sich ein einfaches Verfahren zur Stammbruchzerlegung immer anwenden)
Beispiel: $\frac{2}{15}$

1. Schritt: Suche n mit 2·n > 15 => n=8
2. Schritt: $\frac{2}{15} = \frac{1}{8} + \left(\frac{2}{15} - \frac{1}{8}\right)$
3. Schritt: $\frac{2}{15} = \frac{1}{8} + \frac{1}{120}$

(sollte hier noch keine Stammbruchzerlegung vollständig vorliegen, wird mit dem Restbruch wiederholt…)

Aufgabe 3:
a/b/c: Alle Zweierbrüche haben unendlich viele verschiedene Zerlegungen in SBZ und die Anzahl der Summanden ist beliebig:
Das folgt daraus, dass jeder Stammbruch als Summe von Stammbrüchen dargestellt werden kann: $\frac{1}{x} = \frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{x(x+1)}$.
*Dies lässt sich gut an Zahlenbeispielen ausprobieren

Aufgabe 4:
a) Zweierbrüche mit geradem Nenner haben eine SBZ mit einem Summanden, der sich durch kürzen ergibt.
b) Zweierbrüche mit ungeradem Nenner haben immer eine SBZ mit zwei Summanden. Ist x der ungerade Nenner, dann ist x+1 gerade und w= (x+1):2 eine ganze Zahl. Man überprüft schnell, dass $\frac{2}{x} = \frac{1}{w} + \frac{1}{wx}$
c) Aus : $\frac{1}{x} = \frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{x(x+1)}$ und der Betrachtung aus b) folgt, dass man durch eine weitere Zerlegung einer der Summanden nach demselben Prinzip eine SBZ mit 3 Summanden erhält.
d) Hieraus folgt auch, dass jeder Zweierbruch eine SBZ mit unendlich vielen Summanden hat.