Problem des Monats · November 2022

LÖSUNG

1. Im Sinne einer Wissenschaftspropädeutik ist die erste Aufgabe der empirische Zugang.

- Der feste Umkreisdurchmesser (d = 10 cm, r = 50 mm) soll zum besseren Vergleich zwischen den Einzelzeichnungen vereinheitlichen (s.u.), und die Auswahl vom Pentagramm zu den Dekagrammen soll auf einen machbaren Bereich einschränken. Es gibt hier insgesamt 12 Sterne (siehe Schaubild auf Seite 4).
- Die leichte Frage nach dem Mittelpunktswinkel soll die Schüler*innen gemäß der Richtung des PdMs lenken. Es gibt zwar Konstruktionsmöglichkeiten ohne die Mittelpunktswinkel[1], aber die sind nicht alle intuitiv klar, wohingegen die Idee mit dem Mittelpunktswinkel besser zu den folgenden Aufgaben führt. Mit X = Anzahl der Spitzen ist $\beta = 360^\circ / X$.
- Winkel und Strecken zu messen und systematisch zusammenzutragen, ist eine typisch empirische Arbeit und auch den jüngsten Zirkelteilnehmer*innen möglich. Die genauen Werte findet man auf der ausführlichen Wikipedia-Seite zu geometrischen Sternen[2]. Hier eine Zusammenfassung für unsere Aufgabenstellung:

Stern {X/Y}	Winkel β	Winkel α	Strecken in mm	Gesamt-Strecken
{5/2}	72°	36°	≈95	≈476
{6/2}	60°	60°	≈87	≈520
{7/2}	≈51°	≈77°	≈78	≈547
{7/3}	≈51°	≈26°	≈97	≈682
{8/2}	45°	90°	≈71	≈566
{8/3}	45°	45°	≈92	≈739
{9/2}	40°	100°	≈64	≈579
{9/3}	40°	60°	≈86	≈779
{9/4}	40°	20°	≈98	≈886
{10/2}	36°	108°	≈59	≈588
{10/3}	36°	72°	≈81	≈809
{10/4}	36°	36°	≈95	≈951

[1] Siehe z.B. https://www.youtube.com/playlist?list=PLfgIyGp8SI07Y8s8tjJq4zxiSkuC_U5TZ
[2] https://de.wikipedia.org/wiki/Stern_(Geometrie)

2. Hier geht es darum, aus der Empirie zu allgemeinen Gesetzen zu kommen.

- Im Schaubild auf der letzten Seite kann man folgendes erkennen: Wenn man bei 5 Punkten jeden mit dem folgenden verbindet, entsteht ein Pentagon {5/1}. Bei der Verbindung mit jeden 2. Punkts entsteht ein Pentagramm {5/2}, und {5/3} = {5/2}. Also gibt es nur ein Pentagramm, aber 2 Heptagramme. {6/3} und {8/4} erzeugen nur Linien-Kreuzungen (siehe Schaubild). Somit gibt es nur einen 5er- und 6er-Stern, zwei 7er- und 8er-, drei 9er- und 10er-Sterne usw.. Die Regel ist also, X/2 aufzurunden und 2 abzuziehen: $\lceil X/2 \rceil - 2$

- Das Schaubild auf der letzten Seite zeigt auch Lösungen zu verschiedenen Teilaufgaben.

- Damit man den Stern in einem Zug zeichnen kann, müssen die X und Y vom {X/Y}-Stern teilerfremd sein, dabei gehen wir davon aus, dass $Y < X/2$. Das ist zulässig, da ansonsten wegen der Rotationssymmetrie ein gleicher Stern existiert, für den gilt $Y < X/2$. Ist $Y = X/2$ gibt es nur gerade Linien und keinen Stern in unserem Sinne (siehe Schaubild). Sind X und Y wie verlangt aber nicht teilerfremd, zerlegt man den Stern in mehrere Teile, nämlich in so viele Teile wie der gemeinsame Teiler ist. Das Komplizierte ist nun, zu erkennen, welche Teilsterne den Stern bilden. Also ob es sich um mehrere Vielecke oder um andere Sterne handelt. Damit es sich nur um mehrere Vielecke handelt, muss gelten $X/Y=n$ Dann entstehen immer Y n-Ecke. Teilt Y nicht X, so setzt sich der Stern aus anderen Sternen zusammen.

  Richtig komplex wird es, wenn es darum geht, herauszubekommen, um welche anderen Sterne es sich handelt. Da ist es nun so, dass man den Bruch X/Y, wenn Y und X nicht teilerfremd sind, kürzen kann. So kann man erkennen, aus welchen Sternen sich z.B. {14/6} bzw. {14/4} zusammensetzen. {14/6} besteht aus zwei {7/3}-Sternen, wohingegen {14/4} aus zwei {7/2}-Sternen zusammengesetzt ist. Genaugenommen kann man dieses Argument auch für die Sterne verwenden, bei denen Y X teilt. So besteht ein {15/5}-Stern aus fünf {5/1}-Sternen.

- Eine mögliche Formel lässt sich ebenfalls auf der Wikipedia-Seite finden. Alternativ lautet die Formel zur Berechnung eines Winkels in der Spitze eines beliebigen {X/Y}-Sterns: $\alpha = 180° - 360°Y/X$

  Dies lässt sich mit recht einfachen Mitteln herleiten: Man kann dabei mit dem Mittelpunktswinkel (360°/X) beginnen und sich mit dem Wissen über Innenwinkelsummen, Neben- und Scheitelwinkeln zu der Formel durcharbeiten. Alternativ kann man mit dem Wissen über die Größe des Innenwinkels eines beliebigen X-Ecks (180°(X-2)/X) und dem Wissen, dass die Innenwinkelsumme im Dreieck 180° beträgt, ebenfalls recht schnell die Formel aufstellen. Stellt man dabei zunächst die Formel für den {X/2}-Stern auf, sieht man beim Aufstellen der Formel für den {X/3}- und {X/4}-Stern, dass der Wert im Zähler stets um 180° ansteigt. Den Beweis dafür bleiben wir an dieser Stelle schuldig. (Die Formel für den Winkel zwischen zwei Zacken (z) kann man sich übrigens auf gleiche Weise herleiten. Sie lautet: $z = 180°-360°(Y-1)/X$)

Mögliche weiterführende Fragestellungen:

- Berechnen der Gesamtlänge aller Strecken, die den Stern erzeugen.

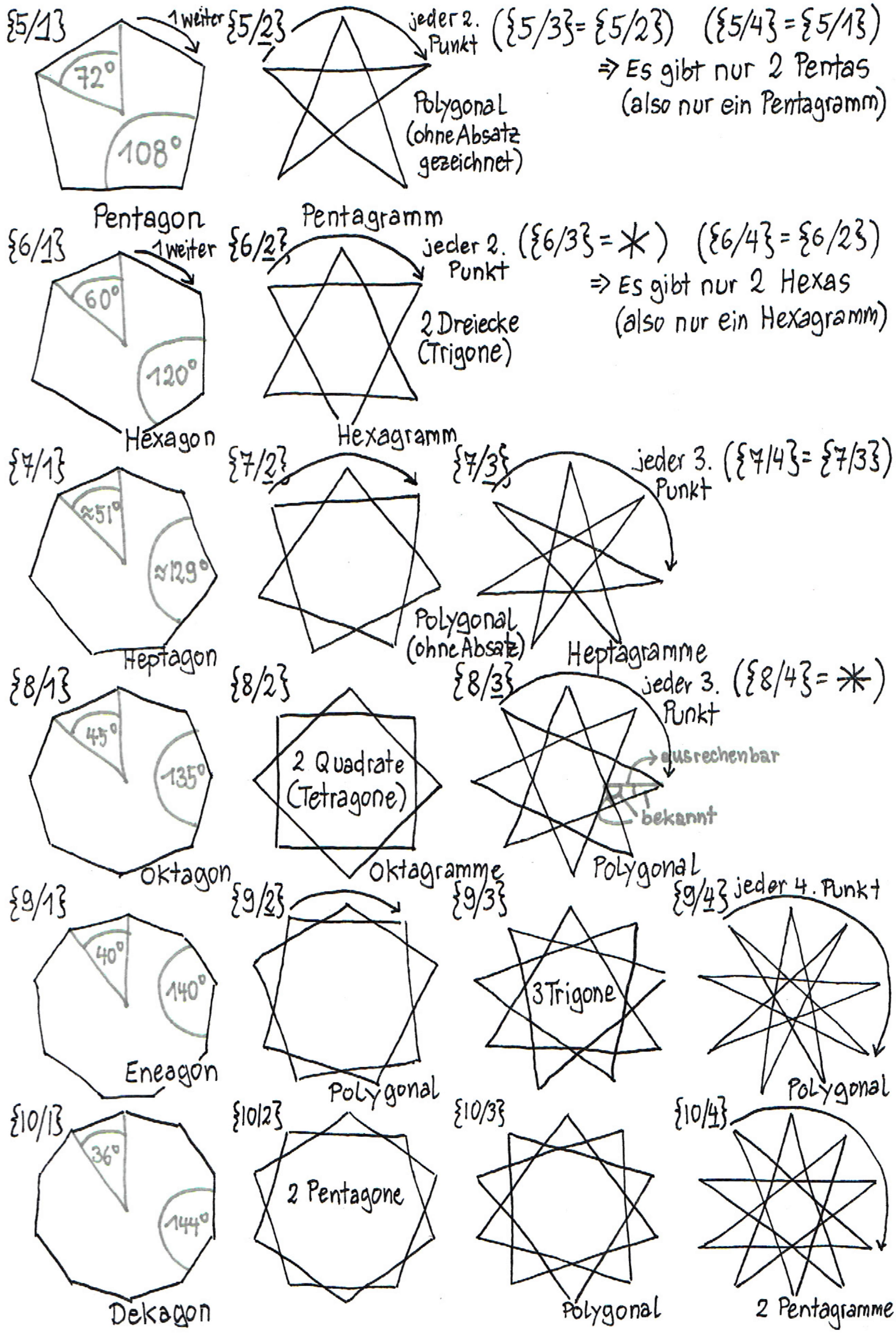
  Natürlich sind die Längen im Gegensatz zu den Winkeln nicht festgelegt, da die Sterne beliebig groß sein können. Setzt man aber beispielsweise eine Außenseite des {X/Y}-Sterns = s, so ergibt sich mittels des Kosinussatzes für eine Innenseite i des im Stern befindlichen X-Ecks eines beliebigen {X/2}-Sterns (Y=2) die Formel: i = Wurzel(2s²(1-cos(180°-360°Y/X))

  Für die Gesamtlänge g eines {X/Y}-Sterns ergibt sich dann die Formel:
  g = 2Xs + X*Wurzel(2s²(1-cos(180°-360°Y/X)))
  oder mittels des Sinussatzes die Formel: i = ssin(180°-360°Y/X) / sin(360°/x)
  Für die Gesamtlänge eines {X/Y}-Sterns ergibt sich dann die Formel:
  g = 2Xs + Xssin(180°-360°Y/X) / sin(360°)
  Gibt man hingegen die Innenseite i vor, so ergeben sich bspw. die Formeln:
  s = isin(360°/x) / sin (180°-360°Y/X) und g = Xi+2Xisin(360°/X) / sin(180°-360°Y/X)

  Betrachtet man nun beliebige {X/Y}-Sterne, so lassen sich die Längen stets unmittelbar aus den bereits bekannten Längen auf gleiche Weise errechnen. Ein {7/3}-Stern hat bspw. die identische Gesamtlänge, ergänzt um 14 (2x7) gleichlange Strecken, die sich wiederum mit Hilfe des Sinussatzes errechnen lassen. Hier lässt sich ebenfalls ein System erahnen. Interessierte Sternforscher könnten sich dazu auf eine neue Mission begeben …

- Es gibt im Alltag (z.B. im nächsten Monat) noch weitere mathematische Sterne, die nicht den obigen Regeln I & II entsprechen. Haltet doch Ausschau nach solchen Sternen und versucht auch hierzu, allgemeingültige Regeln und Formeln zu erforschen.

  Hier kann es alle möglichen individuellen Lösungen geben, die wir weder antizipieren wollen noch können. Viel Freude damit!


{5/1}
1 weiter
72°
108°
Pentagon
{5/2}
jeder 2. Punkt
Polygonal (ohne Absatz gezeichnet)
Pentagramm
({5/3} = {5/2}) ({5/4} = {5/1})
⇒ Es gibt nur 2 Pentas (also nur ein Pentagramm)
{6/1}
1 weiter
60°
120°
Hexagon
{6/2}
jeder 2. Punkt
2 Dreiecke (Trigone)
Hexagramm
({6/3} = ✳) ({6/4} = {6/2})
⇒ Es gibt nur 2 Hexas (also nur ein Hexagramm)
{7/1}
≈51°
≈129°
Heptagon
{7/2}
Polygonal (ohne Absatz)
{7/3}
jeder 3. Punkt
Heptagramme
({7/4} = {7/3})
{8/1}
45°
135°
Oktagon
{8/2}
2 Quadrate (Tetragone)
Oktagramme
{8/3}
jeder 3. Punkt
ausrechenbar
bekannt
Polygonal
({8/4} = ✳)
{9/1}
40°
140°
Eneagon
{9/2}
Polygonal
{9/3}
3 Trigone
{9/4} jeder 4. Punkt
Polygonal
{10/1}
36°
144°
Dekagon
{10/2}
2 Pentagone
{10/3}
Polygonal
{10/4}
2 Pentagramme