Problem des Monats Januar 2026

Lösungshinweise

Aufgabe 1: Erforschung der Packungskombinationen

- **Vorschlag A** (3er- und 8er-Tüten): Die Lücken sind 1, 2, 4, 5, 7, 10, 13. Die größte nicht darstellbare Zahl (Frobenius-Zahl) ist die 13. Ab 14 Bonbons sind alle Mengen zusammenstellbar.

- **Vorschlag B** (3er- und 6er-Tüten): Da der ggT(3, 6) = 3, können nur Vielfache von 3 zusammengestellt werden. Es entstehen unendlich viele Lücken (1, 2, 4, 5, 7, 8, ...).

- **Vorschlag C** (3er- und 13er-Tüten): Die Lücken sind zahlreicher (1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 14, 17, 20, 23). Die größte Lücke ist hier die 23. Ab 24 Bonbons lassen sich alle Mengen bilden.

Vorschlag A ist am besten geeignet, da er die kleinste „maximale Lücke“ aufweist und somit die größte Flexibilität bei größeren Bestellmengen bietet.

Aufgabe 2: Diophantische Gleichungen in Z

Hier wird der Zahlenraum auf negative Werte für x und y erweitert.

- Eine Gleichung $\mathbf{a \cdot x + b \cdot y = n}$ ist in ganzen Zahlen lösbar, wenn **n** ein Vielfaches des $\mathbf{ggT\ (a, b)}$ ist.
  (Erweiterung: Beweis des Lemma von Bézout:
  https://de.wikipedia.org/wiki/Lemma_von_Bézout)

- Beispiel: $\mathbf{3 \cdot 3 + 8 \cdot (-1) = 1}$.

  Da $\mathrm{ggT}\ (3{,}8) = 1$, lässt sich jede ganze Zahl n als $\mathbf{3 \cdot x + 8 \cdot y = n}$ darstellen.

  Mögliche Beispiele für die Lücken:

Anzahl an Bonbons	(3;8)	(3;6)	(3;13)
1	$= \mathbf{3 \cdot 3 + 8 \cdot (-1)}$	x	$= \mathbf{3 \cdot 9 + 13 \cdot (-2)}$
2	$= \mathbf{3 \cdot (-2) + 8 \cdot 1}$	x	$= \mathbf{3 \cdot 5 + 13 \cdot (-1)}$
3	$= \mathbf{3 \cdot 1 + 8 \cdot 0}$	$= \mathbf{3 \cdot 1}$	$= \mathbf{3 \cdot (-12) + 13 \cdot 3}$
4	$= \mathbf{3 \cdot 4 + 8 \cdot (-1)}$	x	$= \mathbf{3 \cdot 10 + 13 \cdot (-2)}$
5	$= \mathbf{3 \cdot (-1) + 8 \cdot 1}$	x	$= \mathbf{3 \cdot 6 + 13 \cdot (-1)}$
6	$= \mathbf{3 \cdot 2 + 8 \cdot 0}$	$= \mathbf{6 \cdot 1}$	$= \mathbf{3 \cdot (-11) + 13 \cdot 3}$

7	$= \mathbf{3 \cdot 5 + 8 \cdot (-1)}$	x	$= \mathbf{3 \cdot 11 + 13 \cdot (-2)}$
8	$= \mathbf{3 \cdot 0 + 8 \cdot 1}$	x	$= \mathbf{3 \cdot 7 + 13 \cdot (-1)}$
9	$= \mathbf{3 \cdot 3 + 8 \cdot 0}$	$= \mathbf{3 \cdot 3}$	$= \mathbf{3 \cdot (-10) + 13 \cdot 3}$
10	$= \mathbf{3 \cdot 6 + 8 \cdot (-1)}$	x	$= \mathbf{3 \cdot 12 + 13 \cdot (-2)}$
11	$= \mathbf{3 \cdot 1 + 8 \cdot 1}$	x	$= \mathbf{3 \cdot 8 + 13 \cdot (-1)}$
12	$= \mathbf{3 \cdot 4 + 8 \cdot 0}$	$= \mathbf{6 \cdot 2}$	$= \mathbf{3 \cdot (-9) + 13 \cdot 3}$
13	$= \mathbf{3 \cdot 7 + 8 \cdot (-1)}$	x	$= \mathbf{3 \cdot 13 + 13 \cdot (-2)}$
14	$= \mathbf{3 \cdot 2 + 8 \cdot 1}$	x	$= \mathbf{3 \cdot 9 + 13 \cdot (-1)}$
15	$= \mathbf{3 \cdot 5 + 8 \cdot 0}$	$= \mathbf{3 \cdot 5}$	$= \mathbf{3 \cdot (-8) + 13 \cdot 3}$
16	$= \mathbf{3 \cdot 8 + 8 \cdot (-1)}$	x	$= \mathbf{3 \cdot 14 + 13 \cdot (-2)}$
17	$= \mathbf{3 \cdot 3 + 8 \cdot 1}$	x	$= \mathbf{3 \cdot 10 + 13 \cdot (-1)}$
18	$= \mathbf{3 \cdot 6 + 8 \cdot 0}$	$= \mathbf{6 \cdot 3}$	$= \mathbf{3 \cdot (-7) + 13 \cdot 3}$
19	$= \mathbf{3 \cdot 9 + 8 \cdot (-1)}$	x	$= \mathbf{3 \cdot 15 + 13 \cdot (-2)}$
20	$= \mathbf{3 \cdot 4 + 8 \cdot 1}$	x	$= \mathbf{3 \cdot 11 + 13 \cdot (-1)}$
21	$= \mathbf{3 \cdot 7 + 8 \cdot 0}$	$= \mathbf{3 \cdot 7}$	$= \mathbf{3 \cdot (-6) + 13 \cdot 3}$
22	$= \mathbf{3 \cdot 10 + 8 \cdot (-1)}$	x	$= \mathbf{3 \cdot 16 + 13 \cdot (-2)}$
23	$= \mathbf{3 \cdot 5 + 8 \cdot 1}$	x	$= \mathbf{3 \cdot 12 + 13 \cdot (-1)}$
24	$= \mathbf{3 \cdot 8 + 8 \cdot 0}$	$= \mathbf{6 \cdot 4}$	$= \mathbf{3 \cdot (-5) + 13 \cdot 3}$
25	$= \mathbf{3 \cdot 11 + 8 \cdot (-1)}$	x	$= \mathbf{3 \cdot 17 + 13 \cdot (-2)}$
26	$= \mathbf{3 \cdot 6 + 8 \cdot 1}$	x	$= \mathbf{3 \cdot 13 + 13 \cdot (-1)}$
27	$= \mathbf{3 \cdot 9 + 8 \cdot 0}$	$= \mathbf{3 \cdot 9}$	$= \mathbf{3 \cdot (-4) + 13 \cdot 3}$
28	$= \mathbf{3 \cdot 12 + 8 \cdot (-1)}$	x	$= \mathbf{3 \cdot 18 + 13 \cdot (-2)}$
29	$= \mathbf{3 \cdot 7 + 8 \cdot 1}$	x	$= \mathbf{3 \cdot 14 + 13 \cdot (-1)}$
30	$= \mathbf{3 \cdot 10 + 8 \cdot 0}$	$= \mathbf{6 \cdot 5}$	$= \mathbf{3 \cdot (-3) + 13 \cdot 3}$

Hier kann außerdem untersucht werden, wie sich aus einer Lösung weitere ermitteln lassen. Beispiele:

- Für (3|8): Ist $(x_0|y_0)$ eine Lösung von n, dann ist $(x_0 + 1|y_0)$ eine Lösung von n+3, $(x_0 + 2|y_0)$ eine Lösung von n+6 usw.

- Allgemein: Ist $(x_0|y_0)$ eine Lösung von n, dann ist $(\boldsymbol{k} \cdot x_0|\boldsymbol{k} \cdot y_0)$ eine Lösung für n=k.

Aufgabe 3: Grafische Darstellung und Lösungsmenge

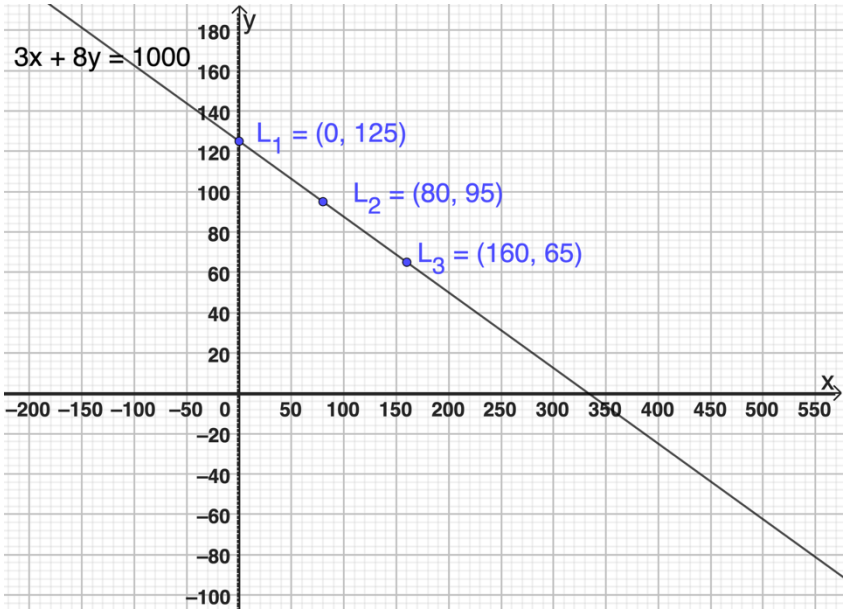
Die Gleichung $\boldsymbol{3x + 8y = 30}$ stellt eine Gerade im Koordinatensystem dar: $\boldsymbol{y = -\frac{3}{8}x + \frac{15}{4}}$

- Die Gerade schneidet im vorliegenden Koordinatensystem bestimmte Gitterpunkte: L(2|3) und P(10|0).
- Die Punkte wiederholen sich in einem festen Rhythmus. Geht man von einem bereits ermittelten Punkt 8 Einheiten nach rechts/links und 3 Einheiten nach unten/oben, landet man beim nächsten Gitterpunkt, also der nächsten ganzzahligen Lösung der Gleichung.
- Weitere mögliche Lösungen sind entsprechend Q(18|-3) oder R(-6|6).

Aufgabe 4: Anwendung (Große Zahlen)

Frage: Wie kombiniert man 1000 Bonbons aus 3er- und 8er-Päckchen? [18]

- **Gleichung:** $\boldsymbol{3x + 8y = 1000}$
- **Lösungsweg:** Da $\boldsymbol{1000}$ durch $\boldsymbol{8}$ teilbar ist ($\boldsymbol{125 \cdot 8 = 1000}$), ist eine Lösung $\boldsymbol{x = 0}$ und $\boldsymbol{y = 125}$.
- **Alternative Lösungen:**
  - Durch systematisches Tauschen (8 kleine gegen 3 große Packungen) ergeben sich weitere Lösungen wie (8|122), (16|119) usw.
  - Durch die bei Aufgabe 3 beschriebene Strategie ergeben sich weitere Lösungen wie z.B. (80|95), (160|65) usw.



- Wie findet man alle Lösungen systematisch?
  - **Startlösung:** (0|125)
  - **Generelle Lösung:** Da $\mathbf{ggT}\ (\boldsymbol{3, 8}) = \boldsymbol{1}$, lauten alle Lösungen:

    $\boldsymbol{x = 0 + 8k}$ und $\boldsymbol{y = 125 - 3k}$ (wobei k eine ganze Zahl ist)
  - **Anzahl der Lösungen für die Fabrik:** Da in der Fabrik $\boldsymbol{x, y \geq 0}$ sein müssen (man kann keine negativen Tüten liefern), muss gelten: $\boldsymbol{125 - 3k \geq 0}$. Daraus folgt $\boldsymbol{k \leq 41,66}$. Es gibt also **42 verschiedene Möglichkeiten** ($\boldsymbol{k = 0, 1, \ldots, 41}$) 1000 Bonbons zu verpacken.

Hinweise für Erweiterungen

1. Die Frobenius-Formel

Für leistungsstarke SuS kann die Formel für zwei teilerfremde Zahlen a, b eingeführt werden:

$$\boldsymbol{g(a,b) = (a-1)(b-1) = ab - a - b}$$

Für 3 und 8 ergibt dies: $\boldsymbol{3 \cdot 8 - 3 - 8 = 13.}$

2. Algorithmen

In höheren Klassenstufen kann der **Erweiterte Euklidische Algorithmus** thematisiert werden, um systematisch Lösungen für Gleichungen wie in Aufgabe 4 zu finden, ohne zu probieren.

Link-Empfehlung:

- https://studyflix.de/mathematik/euklidischer-algorithmus-4923
- „Lineare diophantische Gleichung“ für den mathematischen Hintergrund zum Euklidischen Algorithmus: https://de.wikipedia.org/wiki/Lineare_diophantische_Gleichung
- (https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/mathematik-abitur/artikel/diophantische-gleichungen hier nach unten scrollen)

3. Informatik-Bezug

Die Aufgabe eignet sich hervorragend für eine kleine Programmiereinheit (z. B. in Python), um alle möglichen Kombinationen für n = 1000 innerhalb einer Schleife zu finden.

Python:

```
# Findet alle Lösungen für 3x + 8y = 1000

solutions = [(x, y) for x in range(334) for y in range(126) if 3*x + 8*y == 1000]

print(f"Anzahl der Lösungen: {len(solutions)}")

print(f"Beispiele: {solutions[:3]}")
```