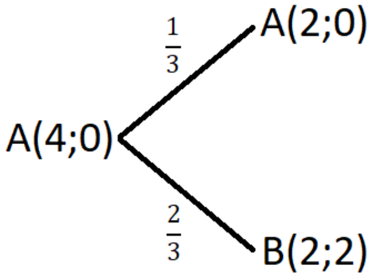
Lösungen und Hinweise:

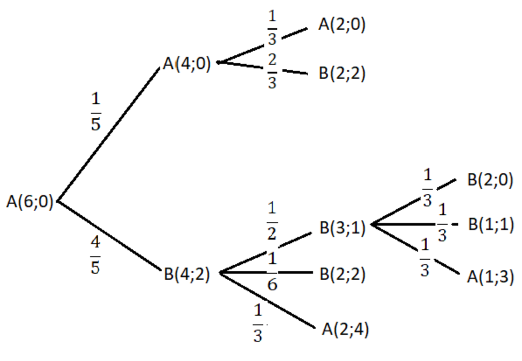
Im Folgenden wird das Wort Wahrscheinlichkeit mit Wkt abgekürzt.

Aufgabe 3:
Der Fall n = 2 (Paare)
Das Aufstellen eines Baumdiagrammes ist schon in diesem Fall nicht trivial. Wie immer gibt es mehrere Möglichkeiten, passende Baumdiagramme aufzustellen. Eine Möglichkeit ist es, je Knotenpunkt eine Spielsituation nach einem Spielzug zu betrachten, also nachdem 2 Karten aufgedeckt wurden. Daher werden die Knotenpunkte mit (u;b) benannt. „u“ steht für die Anzahl der unbekannten Karten, „b“ für die Anzahl der bereits bekannten Karten. Damit ergibt sich ein sehr übersichtliches Baumdiagramm.



Die Ausgangssituation für A ist (4;0), alle 4 Karten sind nicht bekannt. Egal welche Karte von Person A aufgedeckt wird, die dazu passende Karte wird mit der Wkt $\frac{1}{3}$ gezogen. A erreicht damit die Situation (2;0). Die zwei verbliebenen Karten müssen ein Paar sein und dies zum Sieg von A führen. Entsprechend muss Person B mit einer Wkt von $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ gewinnen. Hierbei zieht Person A zu der 1. Karte eine nichtpassende Karte mit der Wkt $\frac{2}{3}$ und übergibt in Spielsituation (2;2) das Spiel an Person B. Diese kann nun durch geschicktes Aufdecken das Spiel sicher für sich entscheiden.

Der Fall n = 3 (Paare)
Schon der Fall mit 6 Karten zeigt, dass das Zeichnen eines passenden Baumdiagrammes wohlüberlegt sein will. Die oben genannte Notation wird weitergeführt. Es ergibt sich das folgende Baumdiagramm.

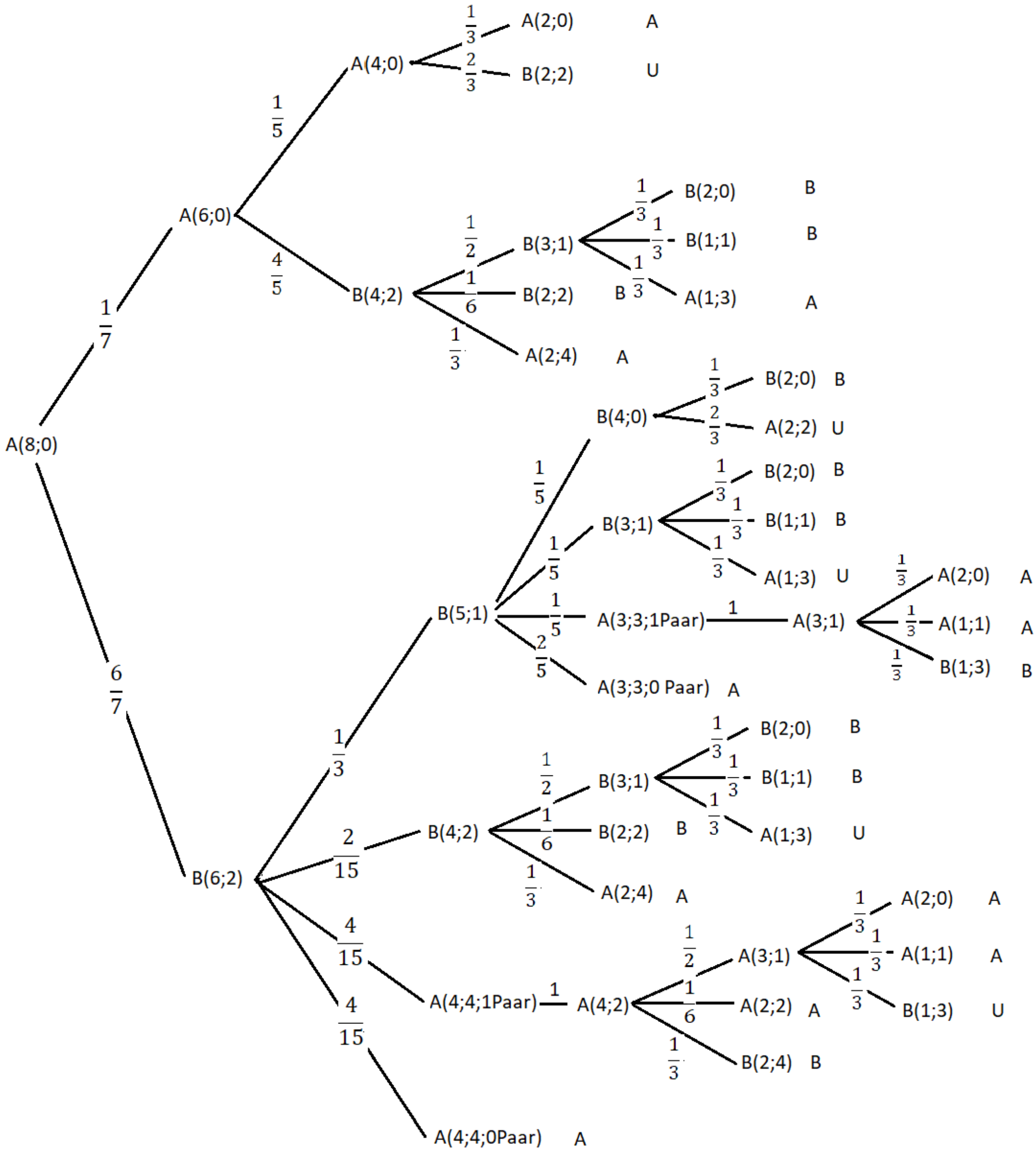


Falls A direkt ein passendes Paar mit $\frac{1}{5}$ Chance findet, erreicht A den (4;0), wie oben für n = 2 besprochen. Andernfalls deckt A zwei nicht zueinander passende Karten auf und B darf die Situation (4;2) spielen.
B könnte dies noch verlieren, da B in der Hälfte aller Fälle eine nicht zu den beiden bereits bekannten Karten aufdeckt und anschließend mit $\frac{2}{3}$ Chance die passende Karte nicht findet. Deshalb ergibt sich insgesamt die Pfadwahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ zur Situation (2;4), die A natürlich jetzt gewinnt.
B kann die Situation (4;2) aber natürlich auch mit einem gefundenen Paar in (3;1) überführen. B kann anschließend noch entweder ein weiteres Paar finden und (2;0) erhalten, oder ein unentdecktes Paar aufdecken und (1;1) erhalten oder gar kein Paar erhalten und A die Situation (1;3) überlassen, die A nun gewinnt.

Damit ergeben sich folgende Gewinnwahrscheinlichkeiten:
$P(A)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{7}{15}=46,\bar{6}\%$ $\qquad$ $P(B)=\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{6}=\frac{8}{15}=53,\bar{3}\%$

Anja Kühnemund, Petra Presun, · mathezirkel.hamburg@gmail.com
http://bildungsserver.hamburg.de/00-schuelerzirkel-mathe

Der Fall n = 4 (Paare)
Bei 4 Paaren wird erstmals der Fall „Unentschieden“ eintreten. Außerdem ergibt sich im Baumdiagramm die Notwendigkeit einer erweiterten Notation. Dies soll im Folgenden exemplarisch ausgeführt werden.



A kann mit $\frac{1}{7}$ Chance direkt in (6;0) überführen. Jetzt schließt sich das Baumdiagramm aus n = 3 an. Mit der Wkt von $\frac{6}{7}$ verspielt A den Zug und B darf aus (6;2) heraus spielen. Nun ergeben sich vier anschließende mögliche Spielsituationen. Insbesondere muss unterschieden werden, ob B zwei nicht zueinander passende Karten spielt, die A dann ein direkt aufdeckbares Paar hinterlässt – also A(4;4;1Paar), oder eben nicht – also A(4;4;0Paar).

Zur Übersichtlichkeit wurden am Ende der Pfade notiert, wer hierbei gewinnt.
Zu dem Ergebnis „Unentschieden“ gehören dann folgende Pfade:
A(8;0) -> A(6;0) -> A(4;0) -> B(2;2)
A(8;0) -> B(6;2) -> B(5;1) -> B(4;0) -> A (2;2)
A(8;0) -> B(6;2) -> B(4;2) -> B(3;1) -> A(1;3)
A(8;0) -> B(6;2) -> A(4;4;1Paar) -> A(4;2) -> A(3;1) -> B(1;3)

$$P(Unentschieden) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{6}{7} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{15} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{14}{105} = 13,\overline{3}$$

$$P(A) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{6}{7} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{3} + \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{15} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \quad + \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{15} \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} + \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{15} = \frac{63}{105} = 60\%$$

$$P(B) = \frac{1}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + + \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{6}{7} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{6}{7} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6} + \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{15} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{28}{105} = 26,\overline{6}$$

Der Vorteil von A ist hier überraschend deutlich zu B.

Aufgabe 4:

Anzahl der Paare	Wkt für Gewinn von A in %	Wkt für Gewinn von B in %
2	33,3	66,6
3	46,6	53,3
4	60	26
5	45,39	54,60
6	36	51
7	56	43
8	45	42
9	46	54
10	47	43
11	51	49
12	42	48
13	51	49
14	47	44
15	50	50
16	45	47
17	51	49

Aufgabe 5:

Es lohnt sich, die Situation für 2 Spieler mit 4 Paaren nochmals genauer zu analysieren:
Die Wahrscheinlichkeit für Spieler 2 zu siegen, beträgt vor Spielbeginn ca. 27%,
zu verlieren ca. 60%

Zug 1:
Spieler 1 findet erwartungsgemäß kein Paar. Dadurch ändert sich die Siegwahrschein-lichkeit für Spieler 2 immerhin schon auf 40%
Er verliert zu 47%

Zug 2:
Spieler 2 dreht zuerst eine unbekannte Karte um, seine Chance nun direkt ein Paar zu erwischen, beträgt nur 20% (1/5). Deshalb entscheidet sich Spieler 2 als zweite Karte eine bereits bekannte Karte aufzudecken und somit an Spieler 1 zu übergeben.
Seine Siegwahrscheinlichkeit ohne diese Strategie wäre nämlich nur insgesamt 30%
(zu verlieren 57%).
Durch die neue Strategie steigt seine Siegchance auf 50% gegenüber 40% zu verlieren.

Zug 3:
Denn es besteht immerhin eine 40% Chance, dass Spieler 1 eine weitere unbekannte Karte aufdeckt...

Anja Kühnemund, Petra Presun, • mathezirkel.hamburg@gmail.com
http://bildungsserver.hamburg.de/00-schuelerzirkel-mathe

…und kein Paar findet, womit Spieler 2 automatisch gewonnen hätte. Natürlich gibt es auch andere Kombinationen, in denen Spieler 2 auch gewinnen würde.

Noch drastischer ist Folgendes:
Deckt Spieler 2 in seinem ersten Zug eine bereits bekannte Karte auf, sollte er kein Paar daraus machen, sondern absichtlich wieder an Spieler 1 übergeben.
Dadurch ändern sich die Siegwahrscheinlichkeiten von 27% auf 51%
(Niederlage von 53% auf 29%)

Zusatzinformationen:
Per Comuteranalyse haben Zwick und Paterson 1993 folgende optimale Spielstrategie entwickelt:
n … Anzahl der Paare von Karten
k … Anzahl bekannter Karten

Decke zwei Karten auf, wenn k = 0 oder wenn n + k ungerade ist.
Ausnahme: Für n = 6 und k = 1 decke eine Karte auf.
Decke eine Karte auf, wenn $k \geq 1$ und n + k ist gerade.
Decke keine Karte auf, wenn n + k ungerade ist und $k \geq \frac{2(n+1)}{3}$
Letzteres geschieht, wenn die Anzahl bekannter Karten relativ hoch ist im Vergleich zur Anzahl der Paare. Natürlich möchte man nicht riskieren, dass man einen Fehlversuch hat und der Gegenspieler damit Paare gewinnen kann. Beispiel: Es sind 4 Karten bekannt und 5 Paare liegen auf dem Tisch.

Wenn n = 1; 6 oder größer als 6 und ungerade ist, dann sollte man zuerst eine Karte aufdecken. Andernfalls sollte man dem Gegen den ersten Zug überlassen.

Weitere Informationen findet man unter anderem unter:
https://mindyourdecisions.com/blog/2015/12/15/the-best-way-to-play-memory-card-game-according-to-math-game-theory-tuesdays/

Anja Kühnemund, Petra Presun, ・ mathezirkel.hamburg@gmail.com
http://bildungsserver.hamburg.de/00-schuelerzirkel-mathe