Problem des Monats ・März 2025

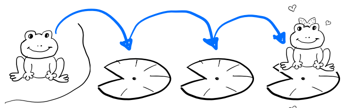
Lösungshinweise

Aufgabe 1

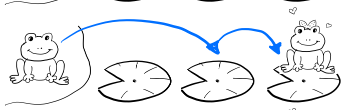
a) zeichnerische Lösung:

Für eine Entfernung von 3 Seerosenblättern gibt es 3 Wege.

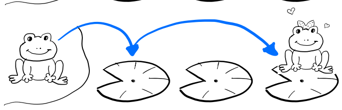
3 = 1 + 1 + 1



3 = 2 + 1

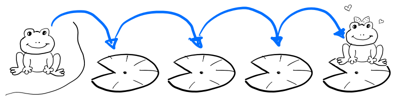


3 = 1 + 2

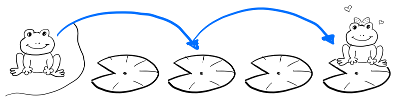


Für eine Entfernung von 4 Seerosenblättern gibt es 5 Wege.

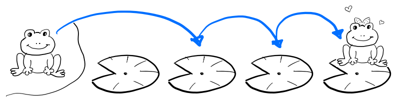
4 = 1 + 1 + 1 + 1



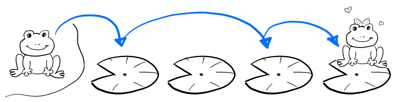
4 = 2 + 2



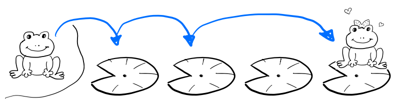
4 = 2 + 1 + 1



4 = 1 + 2 + 1



4 = 1 + 1 + 2



b)

Anzahl der Seerosenblätter bis zur Froschfreundin	Anzahl der Wege
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21

Anja Kühnemund, Petra Presun, ・ mathezirkel.hamburg@gmail.com
https://bildungsserver.hamburg.de/schulfaecher/mint/mathematik/schuelerzirkel-mathematik

8	34
9	55
10	89

c) Da der Frosch genau ein Blatt weiterspringen kann oder auch ein Blatt überspringen kann, kann er das 7. Blatt vom 5. oder 6. Blatt aus direkt erreichen. Die Anzahl der Wege ergibt sich daher immer aus der Summe der zwei vorigen Zahlen. Damit folgt die Tabelle den Regeln der **Fibonacci**-Folge.

Aufgabe 2

a) Die Fibonacci-Zahlen 5 und 8 folgen direkt aufeinander, was im Theorem ausdrücklich ausgeschlossen wird.

b) 11 = 3 + 8
30 = 1 + 8 + 21
34 = 34
88 = 1 + 3 + 8 + 21 +55

c) Eine **systematische Vorgehensweise** zur Bestimmung der **Zeckendorf-Zerlegung** einer natürlichen Zahl:

1. **Finde die größte Fibonacci-Zahl**, die kleiner oder gleich der gegebenen Zahl ist.
2. **Subtrahiere** diese Fibonacci-Zahl von der ursprünglichen Zahl.
3. **Wiederhole den Vorgang** für den verbleibenden Rest, wobei du sicherstellst, dass keine zwei **benachbarten Fibonacci-Zahlen** gewählt werden.
4. **Beende das Verfahren**, wenn der Rest **0** erreicht ist.

Beispiel für 88:

- Die größte Fibonacci-Zahl ≤ 88 ist **55** → 88−55=33
- Die größte Fibonacci-Zahl ≤ 33 ist **21** → 33−21=12
- Die größte Fibonacci-Zahl ≤ 12 ist **8** → 12−8=4
- Die größte Fibonacci-Zahl ≤ 4 ist **3** → 4−3=1
- Die größte Fibonacci-Zahl ≤ 1 ist **1** → 1−1=0

Ergebnis: 88=55+21+8+3+1

Darauf basierend lassen sich Programmierungen zur Zerlegung von größeren Zahlen schreiben.

d) Die Zerlegung ist eindeutig. Beweisideen und Möglichkeiten zum Weiterdenken finden sich unter:

- Florian Woerz: Grundlagen Mathematik | 05.06: Existenz im Zeckendorf-Theorem induktiv bewiesen. https://www.youtube.com/watch?v=_jjKQTo22qY (Zuletzt eingesehen am 08.02.2025)

- Christian Dalvit (2024): Zeckendorf‘s Theorem. https://www.isa-afp.org/browser_info/current/AFP/Zeckendorf/document.pdf (Zuletzt eingesehen am 08.02.2025)

Aufgabe 3

1 = 1

2 = 2

3 = 3

4 = 3 + 1

5 = 5

6 = 5 + 1

7 = 5 + 2

8 = 8

9 = 8 + 1

10 = 8 + 2

11 = 8 + 3

12 = 8 + 3 +1

13 = 13

14 = 13 + 1

15 = 13 + 2

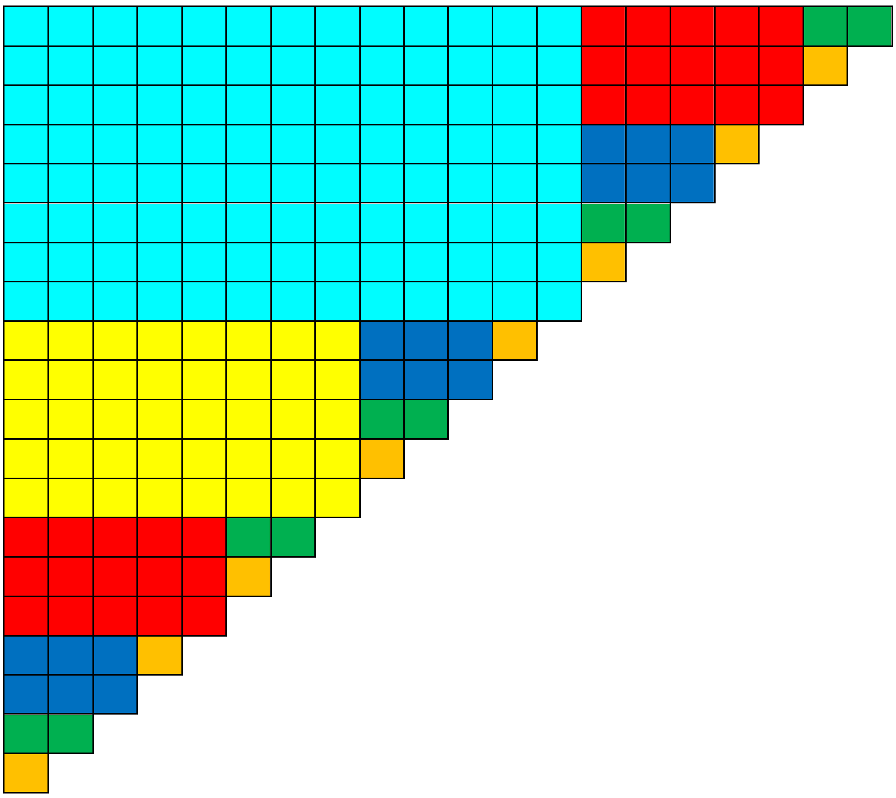
16 = 13 + 3

17 = 13 + 3 + 1

18 = 13 + 5

19 = 13 + 5 + 1

20 = 13 + 5 + 2



Anja Kühnemund, Petra Presun, · mathezirkel.hamburg@gmail.com
https://bildungsserver.hamburg.de/schulfaecher/mint/mathematik/schuelerzirkel-mathematik

a-c)

Von unten nach oben wird die Fläche die Rechtecke an der linken Seite des Dreiecks immer größer, die zunehmende Höhe der Rechtecke entspricht der Abfolge der Fibonacci-Folge. Wenn die Höhe der Rechtecke durch das n-te Folgenglied vorgegeben ist, ist die dazugehörige Breite das n+1-te Folgenglied.

Entspricht eine Zeile (in der Zählung von unten nach oben) einer Fibonacci-Zahl, wird das nächstgrößere Rechteck platziert. Die ganze Zeile ist von diesem Rechteck ausgefüllt. In der darauffolgenden Zeile kommt wieder die kleinste Fibonacci-Zahl (die 1) hinzu. In der zweiten die nächstgrößere usw., es wiederholt sich das Summenschema vom Anfang, bis man bei der nächstgrößeren Fibonacci-Zahl angelangt ist.

Dieses Schema lässt sich beliebig weiter fortsetzen, da die Folge der Fibonacci-Zahlen unbeschränkt ist, sie konvergiert nicht.

Anwendungsmöglichkeiten des Zeckendorf-Theorems:

Statt dem üblichen Binärsystem kann man Zahlen im Zeckendorf-Fibonacci-System darstellen. Die Zeckendorf-Zerlegung einer Zahl kann in eine Binärfolge aus 0 und 1 umgewandelt werden, , wobei jede verwendete Fibonacci-Zahl mit einer **1** und jede nicht verwendete mit einer **0** dargestellt wird.

Für die 88 lautet die Binärdarstellung 101010101.

Die Fibonacci-Codierung basiert auf der Zeckendorf-Darstellung. Diese Codierung wird in Datenkompressionsverfahren genutzt, z. B. in der Informationstheorie.