Problem des Monats November 2025

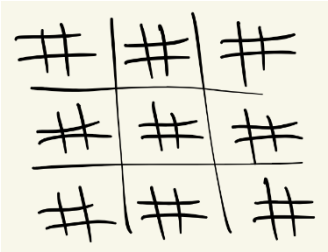
Lösungshinweise

Didaktische Hinweise
Lassen Sie die Schülerinnen und Schüler zunächst analog experimentieren und spielen. Dieses freie Experimentieren fördert ihre Aufmerksamkeit, die Kreativität und die Fähigkeit, selbstständig Muster zu erkennen und Regeln zu entwickeln. Wenn die Kinder eigene Strukturen entdecken, entsteht ein echtes Verständnis für das, was hinter dem Spiel steckt – und genau das ist die Grundlage für nachhaltiges Lernen.

Es gibt aber auch die Möglichkeit, das Spiel online in verschiedenen Varianten zu spielen:

Lösungshinweise:

a) und **b)**



Es muss geklärt werden, wie das Spiel weitergeht, wenn ein Minifeld gewonnen wurde:
- Darf man in diesem Feld weiterhin spielen, oder soll das Feld „gesperrt“ werden?
- Falls der nächste Zug normalerweise in ein gesperrtes Feld führen würde, darf der Spieler dann ein anderes freies Feld frei wählen?
- Oder darf man weiterhin Züge in einem bereits gewonnenen Minifeld eintragen, obwohl diese keine Punkte mehr bringen, sondern nur eine strategische Rolle haben?

Variante 1 – Feld wird gesperrt.
Sobald ein Minifeld gewonnen wurde, darf dort nicht mehr gespielt werden.
Ein Zug, der normalerweise in das bereits gewonnene Feld führen würde, gibt dem nächsten Spieler die freie Wahl eines beliebigen offenen Minifeldes.
Vorteil: Verhindert sinnlose Züge in bereits abgeschlossenen Feldern.
Variante 2 – Weiterhin spielen erlaubt (keine Punkte, strategische Rolle).
Auch in einem bereits gewonnenen Minifeld dürfen Spieler weiter Züge eintragen.
Diese Züge bringen keine Punkte, zählen also nicht für das Gewinnen des Minifeldes, können aber strategisch genutzt werden (z. B. um den nächsten Zielzug des Gegners zu beeinflussen).
Vorteil: Mehr taktische Tiefe, da man „Blockaden“ setzen kann.
Variante 3 – Kombination.
Ein Feld, das gewonnen wurde, zählt für Punkte nicht mehr, ist aber nicht komplett gesperrt.
Die Spieler dürfen dort noch Züge platzieren, aber nur wenn es für den nächsten Zug strategisch sinnvoll ist. Alternativ kann man eine feste Regel festlegen, z. B.: maximal 1–2 zusätzliche Züge pro gewonnenem Minifeld.

Erkenntnis:

Anja Kühnemund, Petra Presun, · mathezirkel.hamburg@gmail.com
https://bildungsserver.hamburg.de/schulfaecher/mint/mathematik/schuelerzirkel-mathematik

Kontrolle über Minifelder mit taktischen „Weiterleitungen“ ist zentral. Versuche, Züge so zu platzieren, dass dein Gegner in ungünstige Minifelder geschickt wird. Regeln, die es erlauben, in ein bereits gewonnenes/gefülltes Minifeld frei zu wählen, erhöhen die taktische Flexibilität.

c) Wie viele verschiedene Kombinationen aus drei kleinen Gewinnfeldern gibt es, die bei

Ultimate Tic-Tac-Toe zu einem Sieg führen, wenn jedes kleine Feld 8 Gewinnmöglichkeiten bietet?

Gewinnwege im kleinen Feld:
Ein 3×3-Feld kann auf 8 Arten gewonnen werden: 3 Reihen; 3 Spalten; 2 Diagonalen.

Gewinnwege im großen Feld:

Das große Feld ist ein 3×3-Feld aus Minifeldern.

Auch hier gibt es 8 Gewinnwege (3 Reihen, 3 Spalten, 2 Diagonalen).

Um ein großes Feld zu gewinnen, muss man 3 kleine Felder in einer Gewinnlinie gewinnen.

Jeder Gewinn eines kleinen Feldes hat 8 mögliche Gewinnmuster. Für jede Gewinnlinie im großen Feld gibt es $8 \times 8 \times 8 = 8^3 = 512$ Möglichkeiten, die Minifelder zu gewinnen.

Da es 8 Gewinnlinien im großen Feld gibt, ergibt sich insgesamt:

$$8 \times 512 = 4096$$

Mögliche Gewinnkombinationen für Ultimate Tic-Tac-Toe.
Alle diese Rechnungen geben nur eine grob vereinfachte Abschätzung und zeigen nicht, wie kompliziert Ultimate Tic-Tac-Toe wirklich ist.

Die Zahl 4096 zählt nur alle theoretischen Möglichkeiten, wie man die kleinen und großen Felder gewinnen könnte.

In Wirklichkeit geht das nicht alles, weil die Zwangszugregel gilt: Der nächste Spieler muss oft in ein bestimmtes Feld ziehen. Außerdem funktionieren manche Gewinnwege nur, wenn der Gegner bestimmte Felder nicht blockiert. Deshalb ist die echte Anzahl der möglichen Spielszenarien kleiner. Die Rechnung hilft vor allem, ein Gefühl dafür zu bekommen, wie viele Möglichkeiten es theoretisch gibt.

d) Wie viele mögliche erste Züge gibt es insgesamt?
Ein 2×2-großes Feld besteht aus 4 großen Kästchen; jedes Kästchen enthält ein 2×2-Minifeld (4 Minifelder). 4×4=16 mögliche erste Züge.
Ein 3×3-großes Feld besteht aus 9 großen Feldern; jedes enthält ein 3×3-Minifeld (9 kleine Felder). Insgesamt 9×9=81 mögliche erste Züge.

Wie viele verschiedene Zustände des Spielbretts – also die Gesamtzahl der möglichen Spielsituationen – sind im Ultimate Tic-Tac-Toe überhaupt möglich? Schätze die Zahl oder versuche, sie mathematisch zu begründen.

Hinweis: Unter „möglichen Spielsituationen“ kann man alle möglichen Konfigurationen des 81-Felder-Bretts verstehen, bei denen die Felder mit X, O oder leer markiert sind, wobei die einzige zwingende Einschränkung das abwechselnde Spiel ist. Eine grobe obere Schranke erhält man, wenn man alle kleinen Felder unabhängig als drei Zustände betrachtet (leer / X / O).
Für das 3×3-System wären das 3^{81} mögliche Belegungen.
Extrafrage: Wie kann man das Potenz einschätzen?

$3^1 = 3$
$3^2 = 9$
$3^3 = 27$
$3^4 = 81$

Man kann den Exponenten 81 in kleinere Teile aufteilen, zum Beispiel in 80 + 1

$$3^{81} = 3^{80+1} = 3^{80} \cdot 3^1 = 3 \cdot (3^4)^{20} = 3 \cdot 81^{20}$$

Damit man sich die Größe besser vorstellen kann, wurde 81 durch 80 ersetzt — also:

$$81^{20} \approx 80^{20}$$

Und weil $80 = 8 \cdot 10$, kann man das so schreiben:

$$80^{20} = (8 \cdot 10)^{20} = 8^{20} \cdot 10^{20}$$

Insgesamt:

$$3^{81} \approx 3 \cdot 8^{20} \cdot 10^{20}$$

Die Zehnerpotenz 10^{20}ist sichtbar gemacht, das ist leicht verständlich: eine 1 mit 20 Nullen.
Was steckt hinter dem anderen Faktor 8^{20}? Rechnen wir 8^{20} grob aus:

$$8^{20} = (10^{\log_{10} 8})^{20} = 10^{20 \cdot \log_{10} 8}$$

Weil $\log_{10} 8 \approx 0{,}903$, ergibt das:

$$8^{20} = 10^{20 \times 0{,}903} = 10^{18{,}06}$$

Das heißt:

$$8^{20} \approx 10^{18}$$

$3^{81} \approx 3 \cdot 10^{38}$.
Viele dieser Belegungen sind allerdings unrealistisch (z. B. solche mit unmöglicher Zugreihenfolge). Die tatsächliche Anzahl legal erreichbarer Spielzustände ist deutlich kleiner, aber immer noch astronomisch groß.

Weiterführende Fragestellungen / weitere Themenfelder:
1. Wie verändert sich das Spiel, wenn schon ein gewonnenes Minifeld zum Gesamtsieg reicht?
Kurzidee: Das Spiel wird kurz und stark zufallsabhängig; strategische Tiefe geht verloren, da ein einzelner taktischer Gewinn sofort das ganze Spiel entscheidet. Verteidigungsstrategien werden wichtiger.

1. Fraktale
Im weiteren Verlauf bietet sich die Einführung des Begriffs „*Fraktal*“ an.
Ein *Fraktal* ist eine geometrische Form, die sich auf verschiedenen Ebenen selbst ähnelt – ganz gleich, wie stark man sie vergrößert oder verkleinert. Mit anderen Worten: Ein kleiner Ausschnitt sieht oft so aus wie das ganze Bild. Um das greifbar zu machen, kann man Beispiele aus der Natur heranziehen: die Äste eines Baumes, die sich immer wieder verzweigen und dabei dieselbe Struktur beibehalten; die Krümmungen einer Küstenlinie, die sich in kleinerem Maßstab wiederholen;
oder die Form von Wolken, die auf jeder Ebene ähnliche Muster zeigen.
Solche Beobachtungen machen deutlich, dass fraktale Strukturen nicht nur mathematische Spielereien sind, sondern auch in unserer Umwelt vorkommen. Gerade diese Verbindung zwischen Mathematik und Natur macht den Kindern oft besonders Spaß – sie erkennen, dass eine einfache Regel zu erstaunlich komplexen und schönen Mustern führen kann.

2. Spieltheorie

Das Spiel eignet sich außerdem gut, um in einem Schritt zur Spieltheorie zu schlagen.
Die Spieltheorie beschäftigt sich mit Situationen, in denen mehrere Beteiligte Entscheidungen treffen, die das Ergebnis für alle beeinflussen. Sie spielt nicht nur in der Mathematik, sondern auch in Wirtschaft, Politik oder Informatik eine große Rolle. Sie kann helfen, strategisches Denken und logisches Argumentieren zu fördern – und den Kindern zeigen, wie sich aus einfachen Regeln spannende, manchmal sogar unerwartete Ergebnisse ergeben.
Link dazu: https://arxiv.org/pdf/2006.02353

https://de.wikipedia.org/wiki/Meta-Tic-Tac-Toe

„Math Games with Bad Drawings", 2002, Ben Orlin