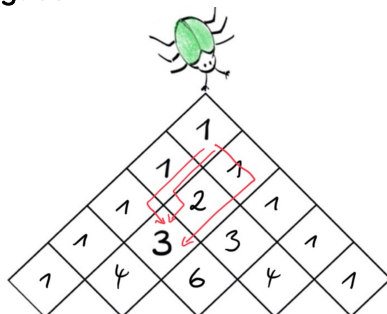


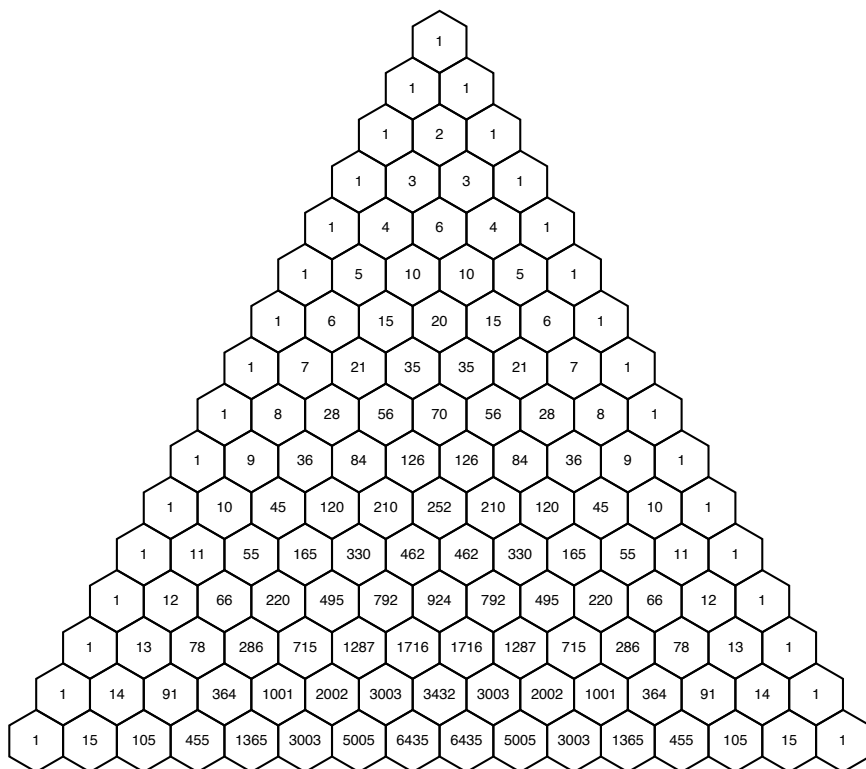
## Lösungshinweise

### Aufgabe 1

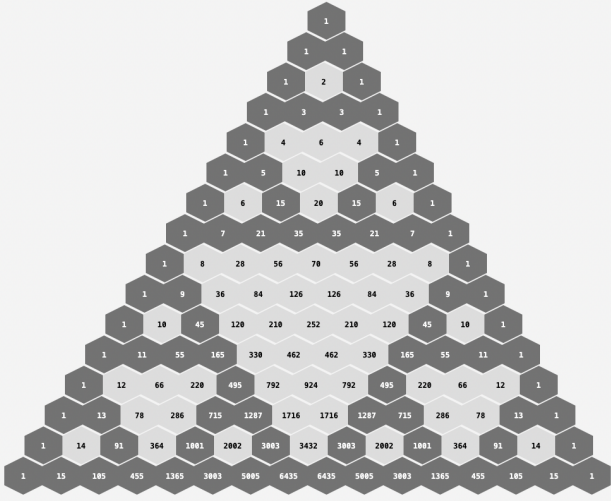
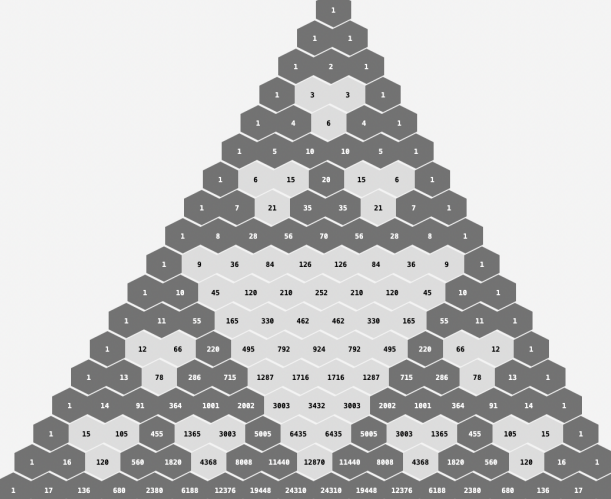


Die Anzahl der möglichen Wege entspricht den Werten in den Kästchen. Diese Werte lassen sich auch mit dem Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{k}$  berechnen, wobei  $n$  für die Zeile steht (man startet bei der ersten Eins mit der Zeile 0) und  $k$  für die Position in der Zeile, von links nach rechts. In der 4. Zeile stehen zum Beispiel die Werte: 1, 4, 6, 4, 1 - die entsprechenden Binomialkoeffizienten sind:  $\binom{4}{0}, \binom{4}{1}, \binom{4}{2}, \binom{4}{3}, \binom{4}{4}$ .

Allgemein besteht jeder Weg aus genau  $n$  Schritten, da es nicht erlaubt ist, rückwärts zu gehen. Man hat bei jedem Schritt immer zwei Möglichkeiten – entweder nach links oder nach rechts. Jeder Schritt nach links (aus Käferperspektive) wird zu  $k$  aufsummiert. Mit dem Binomialkoeffizienten erhält man die Anzahl der Wege.

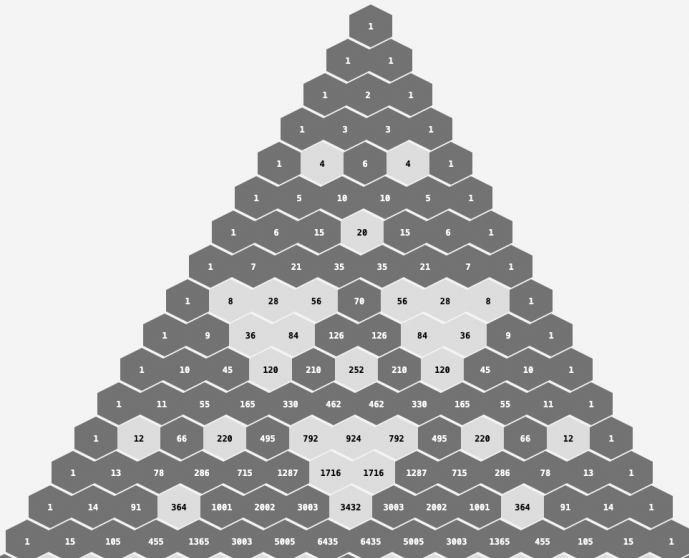


## Aufgabe 2

Nicht teilbar durch ..	Die durch 2/ 3/ 4/ 5/ 6/ 7 nicht teilbaren Zahlen sind in dem Pascalschen Dreieck dunkel markiert:	Mögliche Beobachtungen
2	 <p>The image shows Pascal's triangle with numbers not divisible by 2 (odd numbers) highlighted in dark grey. The numbers are: 1, 1, 1, 2, 1, 1, 3, 3, 1, 1, 4, 6, 4, 1, 1, 5, 10, 10, 5, 1, 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1, 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1, 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1, 1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1, 1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1, 1, 11, 55, 165, 330, 462, 462, 330, 165, 55, 11, 1, 1, 12, 66, 220, 495, 792, 924, 792, 495, 220, 66, 12, 1, 1, 13, 78, 286, 715, 1287, 1716, 1716, 1287, 715, 286, 78, 13, 1, 1, 14, 91, 364, 1001, 2002, 3003, 3432, 3003, 2002, 1001, 364, 91, 14, 1, 1, 15, 105, 455, 1365, 3003, 5005, 6435, 6435, 5005, 3003, 1365, 455, 105, 15, 1, 1, 16, 120, 560, 1820, 4368, 8008, 11400, 12870, 11440, 8008, 4368, 1820, 560, 120, 16, 1, 1, 17, 136, 680, 2380, 6188, 12276, 19448, 24310, 24310, 19448, 12276, 6188, 2380, 680, 136, 17, 1</p>	<p>Wenn man alle ungeraden Zahlen im Pascalschen Dreieck dunkel und alle geraden Zahlen hell färbt, ergibt sich ein Sierpinski-Dreieck. Das ist eine fraktale Form, die aus einem Dreieck durch rekursives Entfernen der mittleren Dreiecke entsteht. Zunächst zerlegt man das Ausgangsdreieck in vier kongruente Teildreiecke. Das mittlere Dreieck wird entfernt, in den äußeren Dreiecken wiederholt sich die Aufteilung in Teildreiecke.</p>
3	 <p>The image shows Pascal's triangle with numbers not divisible by 3 highlighted in dark grey. The numbers are: 1, 1, 1, 2, 1, 1, 3, 3, 1, 1, 4, 6, 4, 1, 1, 5, 10, 10, 5, 1, 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1, 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1, 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1, 1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1, 1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1, 1, 11, 55, 165, 330, 462, 462, 330, 165, 55, 11, 1, 1, 12, 66, 220, 495, 792, 924, 792, 495, 220, 66, 12, 1, 1, 13, 78, 286, 715, 1287, 1716, 1716, 1287, 715, 286, 78, 13, 1, 1, 14, 91, 364, 1001, 2002, 3003, 3432, 3003, 2002, 1001, 364, 91, 14, 1, 1, 15, 105, 455, 1365, 3003, 5005, 6435, 6435, 5005, 3003, 1365, 455, 105, 15, 1, 1, 16, 120, 560, 1820, 4368, 8008, 11400, 12870, 11440, 8008, 4368, 1820, 560, 120, 16, 1, 1, 17, 136, 680, 2380, 6188, 12276, 19448, 24310, 24310, 19448, 12276, 6188, 2380, 680, 136, 17, 1</p>	<p>Hier werden die Teiler der Zahl drei hell gefärbt, die anderen Zahlen dunkel. Das mittlere Dreieck verschiebt sich nach unten, die äußeren Dreiecke enthalten jeweils drei kongruente kleinere Dreiecke.</p>



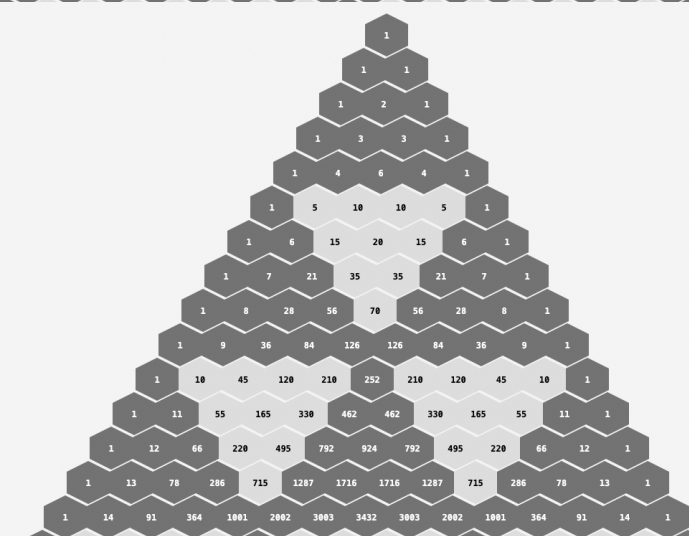
4



Das mittlere Dreieck hat die gleiche Position wie bei dem Dreieck mit den (Nicht-)Teilern von zwei, ist aber in kleinere Dreiecke unterteilt.

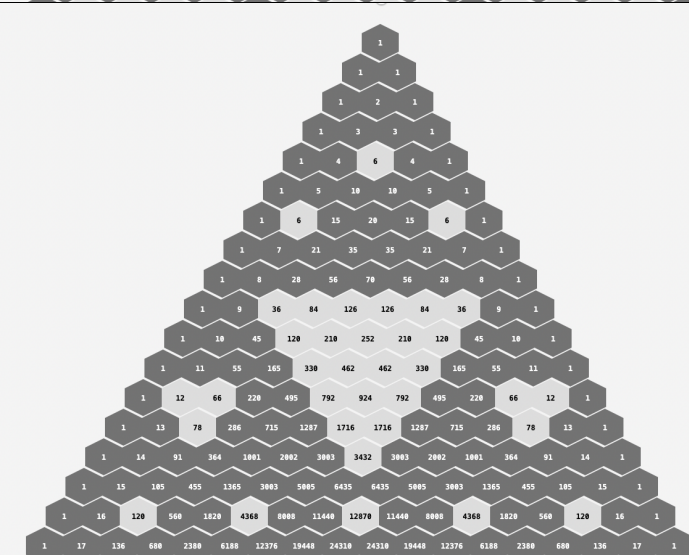
In den äußeren drei Dreiecken findet man jeweils drei Zahlen auf den Mittelsenkrechten der Dreiecke.

5



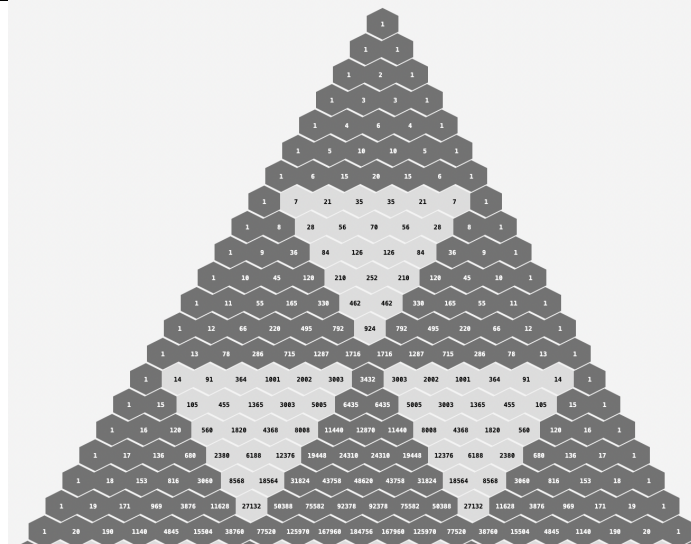
Im Dreieck der (Nicht-)Teiler von 5 ergibt sich eine neue Anordnung. Die Teildreiecke sind kleiner, die äußeren Dreiecke sind komplett dunkel gefärbt. Die hellen Dreiecke haben alle die gleiche Größe.

6



Im Vergleich zum Dreieck der (Nicht-)Teiler von 2 sind hier deutlich mehr Zahlen dunkel gefärbt, die Struktur ist deutlich reduziert.



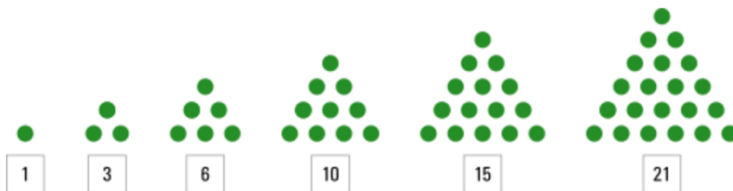


Die Anordnung im Dreieck der (Nicht-)Teiler von 7 ähnelt der Struktur des 5-er Dreiecks, nur sind die hellen Teildreiecke etwas größer und man benötigt mehr Zeilen, um drei helle Teildreiecke sichtbar zu machen.

### Aufgabe 3 - Zahlenfolgen:

Hier kann man nach Aufgabe d) noch weitermachen: **Bilde die Summe in jeder Zeile. Woran erinnern dich diese Zahlen? Schreibe sie als Potenzen. Erkläre das Ergebnis mithilfe der möglichen Wege des Käfers.**

- a) Jede Zahl in dieser Diagonale entsteht, indem man  $1 +$  die vorherige Zahl bildet:  $1, 1 + 1 = 2, 2 + 1 = 3, 3 + 1 = 4, 4 + 1 = 5, \dots$  Der Grund dafür liegt in der Bildungsregel des Pascalschen Dreiecks: Jede Zahl ist die Summe der beiden Zahlen darüber. In dieser Diagonale steht links daneben immer eine 1, deshalb wird jeweils 1 addiert. So entstehen genau die natürlichen Zahlen.
- b) Man kann die Zahlenfolge als Punktmuster in Dreiecksform darstellen:



Jede Zahl entsteht, indem man die nächste natürliche Zahl addiert:  
 $1, 1 + 2 = 3, 3 + 3 = 6, 6 + 4 = 10, 10 + 5 = 15, \dots$

Allgemeine Formel:

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Quellen mit weiterführenden Ideen:

- <https://kiwole.de/die-dreieckszahlen/>
- <https://www.youtube.com/watch?v=fXO9HeldPdE>

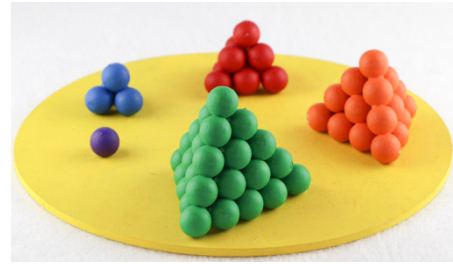
- c) Diese Zahlen entstehen durch Aufsummieren der Dreieckszahlen:  $1, 1 + 3 = 4, 4 + 6 = 10, 10 + 10 = 20, 20 + 15 = 35, \dots$

Allgemeine Formel:

$$T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$



Diese Zahlen nennt man Tetraederzahlen, weil sie die Anzahl von Kugeln in einer Pyramide mit einem gleichseitigen Dreieck als Grundfläche (Tetraeder) beschreiben.



Quelle: <https://mathothek.de/katalog/tetraederzahlen-knoelei-mit-kugelpyramiden/>

d) Wenn man die Zahlen in den flachen Diagonalen des Pascalschen Dreiecks addiert, erhält man die berühmte Fibonacci-Folge: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

Regel der Fibonacci-Zahlen: Jede Zahl ist die Summe der beiden vorhergehenden Zahlen und jede Zahl im Pascalschen Dreieck ist die Summe der beiden darüberliegenden Zahlen. Beim Addieren entlang flacher Diagonalen überträgt sich diese Additionsstruktur und führt zur Fibonacci-Folge. Diese Zahlenfolge kommt sehr häufig in der Natur, in der Kunst, in der Architektur und in der Mathematik vor.

Beispiele und Erklärungen für das Auftreten von Fibonacci-Folgen in der Natur und der Kunst findet man hier: <https://mathothek.de/katalog/fibonacci-folge-erstaunliche-gesetzmaessigkeiten-in-der-natur-und-auftritte-in-der-kunst/>

#### Zusatzaufgabe (siehe oben)

Addiert man alle Zahlen in einer Zeile des Pascalschen Dreiecks, erhält man:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...

Diese Zahlen erinnern an die Zweierpotenzen. Man kann sie schreiben als:  $2^0 = 1$ ,  $2^1 = 2$ ,  $2^2 = 4$ ,  $2^3 = 8$ , ... Allgemein gilt für die  $n$ -te Zeile: Summe =  $2^n$

#### Begründung mit dem Käfer:

In der  $n$ -ten Zeile hat der Käfer genau  $n$  Schritte gemacht.

Bei jedem Schritt hat er zwei Möglichkeiten: links oder rechts. Damit gibt es insgesamt:  $2^n$  verschiedene Wege.

Die Zahlen in der Zeile zählen alle Wege, die zu einem bestimmten Beet führen. Addiert man sie, erhält man also die Gesamtzahl aller möglichen Wege.

