Lösungshinweise

Aufgabe 1: Fehler im Dreieck

a) **Regel:**
Am Rand stehen immer Einsen. Jede innere Zahl ist die Summe der beiden Zahlen schräg darüber.

b) **Korrekturen ab Zeile 5**
Zeilennummerierung wie im Anhang: oberste 1 ist Zeile 0.

- Zeile 5: 1 5 10 11 5 1 → 1 5 10 10 5 1
  Denn 4 + 6 = 10.
- Zeile 6: 1 6 15 20 15 7 1 → 1 6 15 20 15 6 1
  Denn 5 + 1 = 6.
- Zeile 7: 1 7 21 41 41 21 7 1 → 1 7 21 35 35 21 7 1
  Denn 15 + 20 = 35 und 20 + 15 = 35.

Didaktischer Hinweis:
Jüngere Schüler:innen können die beiden „Elternzahlen“ über einem Feld mit Pfeilen verbinden. Zusätzlich hilft die Symmetrie des Dreiecks: Jede Zeile liest sich von links und rechts gleich.

Aufgabe 2: Färbung des Dreiecks

Ergebnis: Man braucht **mindestens 3 Farben**.

Warum reichen 2 Farben nicht?
Es gibt drei Felder, die sich paarweise an Seiten berühren, zum Beispiel ein kleines Dreieck aus benachbarten Feldern. Diese drei Felder müssen alle verschiedene Farben haben. Also reichen 2 Farben nicht.

Warum reichen 3 Farben aus?
Man kann jedes Feld F(n,k) nach dem Rest von n + k beim Teilen durch 3 färben:

- Farbe A: $n + k \equiv 0 \mod 3$
- Farbe B: $n + k \equiv 1 \mod 3$
- Farbe C: $n + k \equiv 2 \mod 3$

Benachbarte Felder unterscheiden sich dann immer in diesem Rest, also haben sie verschiedene Farben.

Anja Kühnemund, Petra Presun, · mathezirkel.hamburg@gmail.com
https://bildungsserver.hamburg.de/schulfaecher/mint/mathematik/schuelerzirkel-mathematik

Didaktischer Hinweis:
Erst praktisch färben lassen, dann die Begründung in zwei Teile zerlegen: „Warum nicht weniger?“ und „Warum funktioniert es immer?“ Das ist eine gute Übung für vollständige mathematische Begründungen.

Aufgabe 3: Pascalblume

Vermutung:
In jeder Pascalblume ist das Produkt der drei Blütenblätter der einen Farbe gleich dem Produkt der drei Blütenblätter der anderen Farbe. Wichtig ist, dass die zentrale Zelle **nicht am Rand** des Pascalschen Dreiecks liegt, also $1 \leq k \leq n-1$ damit alle angrenzenden Zellen existieren.

Beispiel mit Mittelpunkt F(6,2) = 15:
Eine Farbe:
$6 \cdot 10 \cdot 35 = 2100$
Andere Farbe:
$20 \cdot 5 \cdot 21 = 2100$

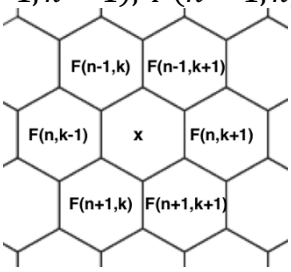
Noch ein Beispiel mit Mittelpunkt F(7,3) = 35:
$21 \cdot 20 \cdot 70 = 29400$
und
$35 \cdot 15 \cdot 56 = 29400$

Beweis:
Sei das mittlere Feld

$$F(n,k) = x = \binom{n}{k}.$$

Die sechs Nachbarn sind:

$$F(n,k-1),\ F(n,k+1),\ F(n-1,k-1),\ F(n-1,k),\ F(n+1,k),\ F(n+1,k+1).$$



Bei der 3-Färbung gehören zu einer Blütenblattfarbe zum Beispiel

$$F(n,k-1), \quad F(n-1,k), \quad F(n+1,k+1).$$

Zur anderen Blütenblattfarbe gehören

$$F(n,k+1), \quad F(n-1,k-1), \quad F(n+1,k).$$

Unter Nutzung von : $\boxed{F(n,k+1)=\frac{n-k}{k+1}\cdot F(n,k)}$

schreibt man alle sechs Nachbarn als Vielfache von x:

- rechtes Blütenblatt: $F(n,k+1)=\frac{n-k}{k+1}\cdot x$
- linkes Blütenblatt: $F(n,k-1)=\frac{k}{n-k+1}\cdot x$, weil $x=\frac{n-(k-1)}{(k-1)+1}\cdot F(n,k-1)$
- oberes linkes Blütenblatt: $F(n-1,k-1)=\frac{k}{n}\cdot x$, weil $x=F(n-1,k-1)+F(n-1,k)$ und $F(n-1,k)=\frac{(n-1)-(k-1)}{(k-1)+1}\cdot F(n-1,k-1)$ gilt

  $x=F(n-1,k-1)+\frac{n-k}{k}\cdot F(n-1,k-1)$

  $=F(n-1,k-1)\cdot(1+\frac{n-k}{k})$

  $=F(n-1,k-1)\cdot(\frac{k}{k}+\frac{n-k}{k})$

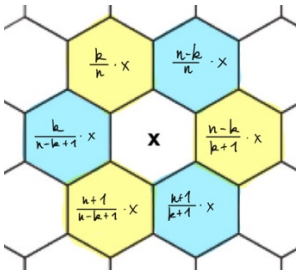
  $=\frac{n}{k}\cdot F(n-1,k-1)$

- oberes rechtes Blütenblatt: $F(n-1,k)=\frac{n-k}{n}\cdot x$,
  weil $F(n-1,k)=\frac{(n-1)-(k-1)}{(k-1)+1}\cdot F(n-1,k-1)$ und $F(n-1,k-1)=\frac{k}{n}\cdot x$ gilt $F(n-1,k)=\frac{(n-1)-(k-1)}{(k-1)+1}\cdot\frac{k}{n}\cdot x$

- unteres linkes Blütenblatt: $F(n-1,k-1)=\frac{n+1}{n-k+1}\cdot x$,
  weil $F(n+1,k)=F(n,k-1)+F(n,k)$ und $F(n,k-1)=\frac{k}{n-k+1}x$ gilt
  $F(n+1,k)=\frac{k}{n-k+1}x+x=x\cdot(\frac{k}{n-k+1}+\frac{n-k+1}{n-k+1})$

- unteres rechtes Blütenblatt: $F(n+1,k+1)=\frac{n+1}{k+1}\cdot x$, weil $F(n+1,k+1)=F(n,k)+F(n,k+1)=x+\frac{n-k}{k+1}\cdot x=x\cdot(1+\frac{n-k}{k+1})=x\cdot(\frac{k+1}{k+1}+\frac{n-k}{k+1})$

Zusammengefasst:



Das Produkt der ersten Farbe (blau) ist also:

$$\frac{k}{n-k+1}\cdot x\cdot\frac{n-k}{n}\cdot x\cdot\frac{n+1}{k+1}\cdot x.$$

Für die andere Farbe (gelb) erhält man:

$$\frac{n-k}{k+1} \cdot x \cdot \frac{k}{n} \cdot x \cdot \frac{n+1}{n-k+1} \cdot x.$$

Beide Produkte sind gleich:

$$\frac{k(n-k)(n+1)}{n(k+1)(n-k+1)} x^3$$

Damit ist die Vermutung bewiesen.

Didaktischer Hinweis:
Vor dem Beweis unbedingt mehrere konkrete Blumen ausrechnen lassen. Die Produktgleichheit wirkt dann überraschend und motiviert den Beweis. Für jüngere Schülerinnen und Schüler kann man den Beweis über die Wegzählung aus dem Anhang führen (auch ohne Variablen); für ältere ist die Binomialkoeffizienten-Schreibweise deutlich kürzer.

Beweis:

$$\binom{n-1}{k-1} \cdot \binom{n}{k+1} \cdot \binom{n+1}{k} = \binom{n-1}{k} \cdot \binom{n}{k-1} \cdot \binom{n+1}{k+1}$$

Für die linke Seite gilt:

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}$$

$$\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n-k+1)!}$$

Also:

$$\frac{(n-1)!\,n!\,(n+1)!}{(k-1)!\,k!\,(k+1)!\,(n-k-1)!\,(n-k)!\,(n-k+1)!}$$

Für die rechte Seite gilt:

$$\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!}$$

$$\binom{n}{k-1} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!}$$

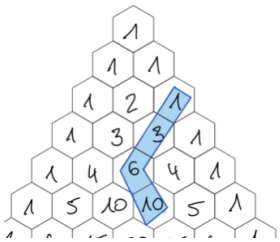
$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!}$$

Also ebenfalls:

$$\frac{(n-1)!\,n!\,(n+1)!}{(k-1)!\,k!\,(k+1)!\,(n-k-1)!\,(n-k)!\,(n-k+1)!}$$

Damit sind beide Produkte gleich.

Weitere interessante Problemstellungen zum Pascalschen Dreieck:



- In der nebenstehenden Abbildung siehst du den mathematischen Hockeyschläger.
  Wie hängen die Zahlen jeweils zusammen? Findest du noch weitere mathematische Hockeyschläger?

- Untersuche das Dreieck. Es verstecken sich viele bekannte Zahlenreihen darin. Findest du ...
  - die Reihe der natürlichen Zahlen,
  - die Summe der natürlichen Zahlen,
  - die Reihe der Binärzahlen,
  - die Reihe der Fibonacci-Zahlen?

  Kannst du erklären, wie sie zu Stande kommen?

... und noch mehr findet man hier:

- https://www.speicherleck.de/iblech/stuff/chaosspiel-2022/arbeitsblaetter.pdf
- https://link.springer.com/article/10.1007/s00591-025-00401-z
- http://groolfs.de/Stochastikpdf/PascalschesDreieck.pdf
- https://de.scribd.com/presentation/294986285/Pascal-Triangle