V2 · Graphen

Daten und Beziehungsstrukturen · elementare Aspekte

Übersicht

Inhalte

Dieser Themenbereich führt ein in ein wichtiges Teilgebiet der diskreten Mathematik, zunächst über einen Sonderfall von Graphen, die Netzpläne. Neben einigen Begriffen geht es dabei auch um verschiede Darstellungsmöglichkeiten von Graphen und deren Vor- und Nachteile.
Einige wichtige Probleme der Graphentheorie werden anschließend an einem einzigen Graphen angesprochen:

- Problem des kürzesten Weges und dazu der Algorithmus von Dijkstra
- Problem des minimalen Spannbaums (aufspannenden Baumes)
- Problem des Handlungsreisenden
- Chinesisches Briefträger Problem.

Ein Ausblick auf wirklich reale Probleme und der Rückblick auf den Themenbereich stehen am Ende der Unterrichtsreihe.

Methodische und didaktische Hinweise

Vorschlag der Unterrichtsform für das 1. paradigmatische Beispiel (Netzplan):
Partnerarbeit und je nach deren Verlauf Informationen durch die Lehrperson, Unterrichtsgespräch

Die Ideen der Schülerinnen und Schüler sollten auf jeden Fall ernst genommen und nach Möglichkeit aufgegriffen werden, denn die Darstellung von Netzplänen und den zugehörigen Tabellen sind auch in der Literatur sehr verschieden. Oft gibt es auch mehrere denkbare Lösungen. Das gilt auch für die Probleme im weiteren Verlauf der Unterrichtseinheit.

Vorschlag der Unterrichtsform für das 2. paradigmatische Beispiel (Graphen):
Gruppenarbeit, je nach Lerngruppe auch arbeitsteilig.

Dabei geht es besonders um die Entwicklung von Lösungsstrategien, vielleicht sogar einem Algorithmus. Graphisch orientierte Vorschläge sind genau so erwünscht wie textliche, die eine Strategie beschreiben. Siehe dazu auch die Lösungsvorschläge. Lösungsstrategien sind selbst bei Computereinsatz notwendig, da z.B. das Problem des Handlungsreisenden noch nicht vollständig gelöst ist.

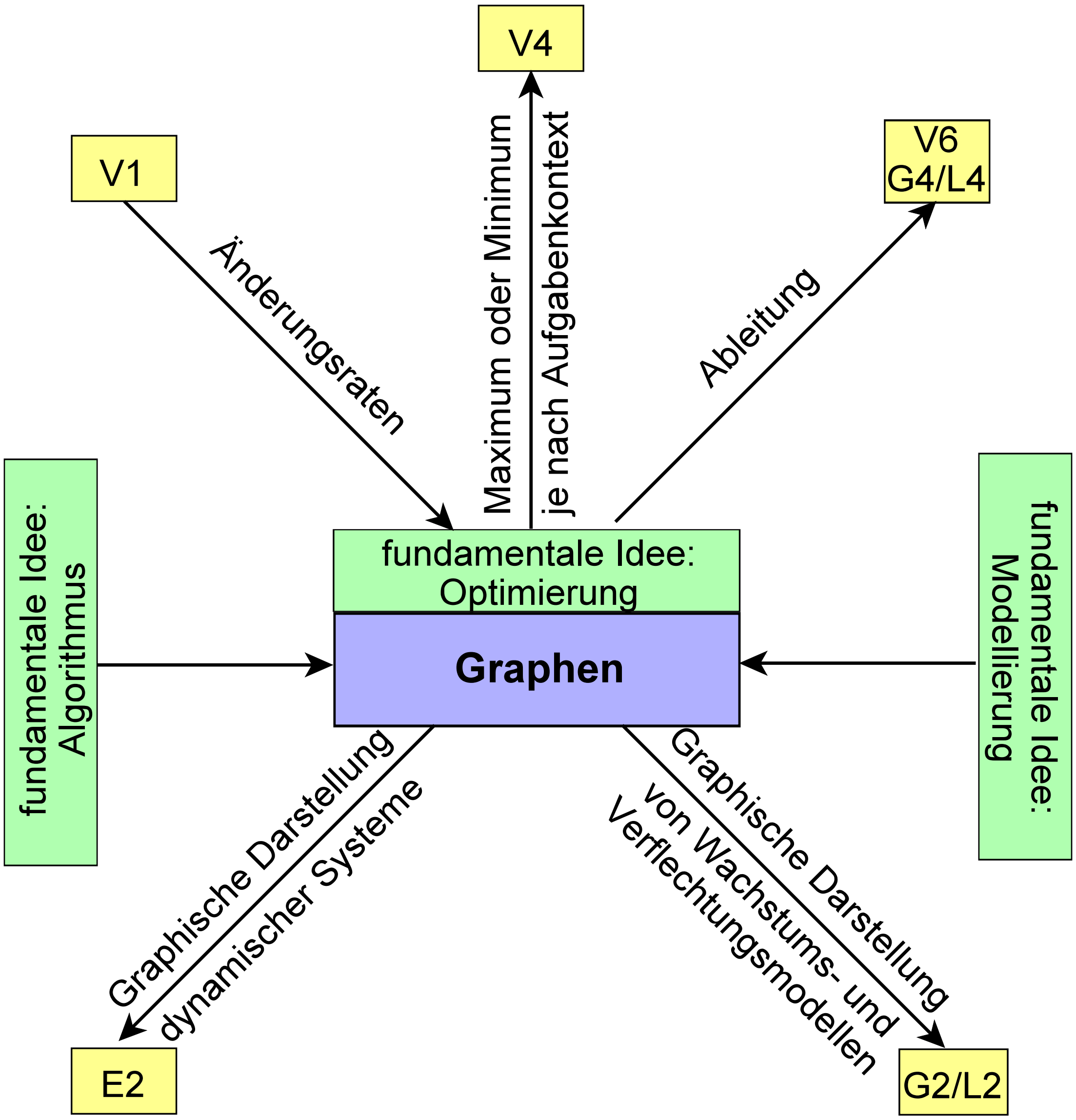
„Schülerinnen und Schüler haben oft ein eingeengtes Bild von der Vielfalt der Mathematik. Rechnen und — allgemein — der Umgang mit Zahlen ist nur ein, wenn auch ein besonders wesentlicher, Teil der Mathematik. Es gibt viele Möglichkeiten, Denkprozesse so zu formalisieren, dass sie bei der Lösung von Problemen nützlich sein können. Insbesondere spielen anschauliche Darstellungen, grafische Abstraktionen von Prozessen, Beziehungen, Strukturen und Denkabläufen dabei eine wichtige Rolle. Die Verwendung von Skizzen (grafische Veranschaulichungen, ‘Struktogrammen’, auch grob gezeichneten geometrischen Figuren, etc.) im Unterricht kann nicht hoch genug eingeschätzt werden.
Neben diesen didaktisch wertvollen Veranschaulichungen gibt es aber auch sogenannte ‘intelligente Grafiken’, d. h. grafische Darstellungen von Problemen, wo allein durch die Art der Darstellung

bereits wesentliche Ideen und Impulse für die Lösung des Problems gegeben sind. Die Erfindung und die Arbeit mit derartigen Darstellungen von 'Beziehungsstrukturen' macht einen — heute immer wichtiger werdenden — Teil der Mathematik aus."

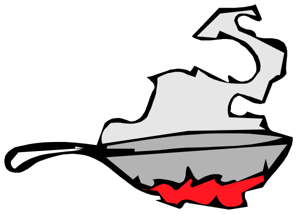
Aus *Hinweise und zusätzliche Materialien für den Unterrichtsgebrauch* (zu [2], Thema „Graphen", www.e-LISA.at)

Vernetzungen

Jeder Lernende (und auch jeder Lehrende) muss und wird sich eigene Vernetzungen schaffen und konkret ausformen. Im Unterricht sollten aber dazu Angebote kommen: Die folgende Grafik gibt einen Überblick, in welchen Bereichen Vernetzungen im Prinzip wünschenswert sind.



Vorschläge für den Unterricht



Netzpläne · Paradigmatisches Beispiel:

Sie laden Freunde zum Essen ein, das Sie selbst zubereiten. Es gibt zum Fleisch Bratkartoffeln und gedünstete Erbsen und Wurzeln. Da Ihre Freunde Teetrinker sind, wird zum Essen frisch zubereiteter Tee serviert.
Damit Sie nichts vergessen und alles rechtzeitig fertig ist, haben Sie sich aufgeschrieben, was zu tun ist und wie lange es jeweils dauert:

Tisch decken: 20 Minuten
Fleisch zubereiten: 2 Stunden
Fleisch tranchieren: 10 Minuten
Kartoffeln vorbereiten: 10 Minuten
Kartoffeln zubereiten: 1 Stunde
Erbsen und Karotten vorbereiten: 10 Minuten
Dünsten von Erbsen und Karotten: 15 Minuten
Tee zubereiten: 10 Minuten
Teekanne an den Tisch stellen: ½ Minute
Speisen auftragen: 5 Minuten

In einer Tabelle könnte man noch vermerken, was vor einer Tätigkeit auf jeden Fall fertig gestellt sein muss:

Nummer	Tätigkeit	Zeit (min)	Vorgänger
1	Tisch decken	20	keine
2	Fleisch zubereiten	120	keine
3	Fleisch tranchieren	10	2
4	Kartoffeln vorbereiten	10	keine
5	Kartoffeln zubereiten	60	4
6	Erbsen und Karotten vorbereiten	10	keine
7	Erbsen und Karotten dünsten	15	6
8	Tee zubereiten	10	keine
9	Teekanne auf den Tisch stellen	0,5	8
10	Essen servieren	5	1,3,5,7,9

Mit einer Grafik könnte man verdeutlichen, welche Vorgänge gleichzeitig ablaufen können, was mit einer Tabelle noch weitere Spalten erfordern und daher unübersichtlich würde. Versuchen Sie es doch einmal.
Können Sie herausbekommen, wie lange die gesamte Vorbereitung nach Ihrem Plan mindestens dauern wird? Gibt es irgendwo Pufferzeiten („Luft“ in der zeitlichen Abfolge)?

Lösungsvorschläge:

Gibt es mehrere Lösungsvorschläge, sollten diese auch hinsichtlich Ihrer Unterschiede diskutiert werden. Deutung, Kritik und Beantwortung der Frage nach der insgesamt kürzesten Zeit für alle Vorbereitungen sollten sich auf die Lösungsvorschläge der Schülerinnen und Schüler beziehen. Der folgende Vorschlag für einen zugehörigen Netzplan ist auch nur eine denkbare graphische Umsetzung der Tabelle.

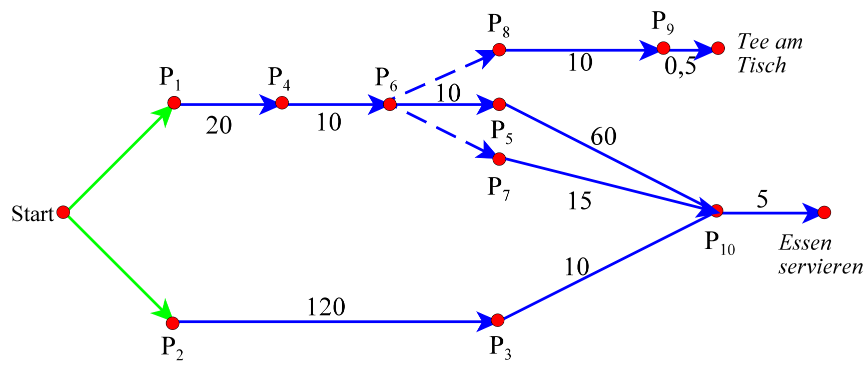


Abb. 3 · denkbarer Graph zum paradigmatischen Beispiel (Aufgabe 1)

1. Begriffe:

Die Begriffe können im Lauf der Diskussion über die Lösungsvorschläge der Schülerinnen und Schüler (oder über obigen Vorschlag) schrittweise eingeführt werden.
Sie sind auch in den Aufgabenblättern für die Hand der Lernenden enthalten.

Die Darstellung in Abbildung 3 nennt man allgemein *Graph*, diese spezielle Art *Netzplan*.
Die einzelnen Teilaufgaben des Projekts wie „Tisch decken", die in der Tabelle mit Nummern versehen wurden, sind im Graphen durch *Punkte* gekennzeichnet, die man oft *Knoten* oder *Ecken* nennt, die Verbindungslinie zwischen zwei Knoten heißt *Kante*.
Die Zeitdauer einer Teilaufgabe ist auf die Kante nach dem zugehörigen Knoten geschrieben. So benötigt z.B. die Erledigung der Teilaufgabe 5 60 Minuten. Ein Graph, dessen Kanten Bewertungen (hier die Zeit) zugeordnet sind, heißt auch *bewerteter Graph*. Die Länge der Kanten hat dabei nichts mit der Bewertung (hier zugehörige Zeitdauer) zu tun.
Die Kanten sind in obigem Graphen Pfeile, da in der gestellten Aufgabe und bei Netzplänen allgemein Kanten nur in einer Richtung abgearbeitet werden können. Man sagt zu solchem Graph auch *gerichteter Graph*.

2. Deutung des Netzplans:

Während z.B. das Fleisch im Ofen schmort, kann man ja zeitgleich andere Tätigkeiten verrichten, also etwa den Tisch decken, dann die Kartoffeln vorbereiten...
Konkret sagt obiger Netzplan:
Fleisch zubereiten und Fleisch tranchieren läuft hintereinander ab und dauert 120 + 10 = 130 (Minuten).
Parallel dazu wird der Tisch aufgedeckt, die Kartoffeln vorbereitet, dann das Gemüse. Dies dauert 20 + 10 + 10 = 40 (Minuten). Ab hier werden drei Dinge parallel gemacht: Kartoffeln zubereiten (60 Minuten) · Gemüse dünsten (15 Minuten) · Tee zubereiten und Teekanne zum Tisch bringen (10½ Minuten) . Die Servierzeit mit 5 Minuten schließt sich am Ende an.

3. Kritik:

Es sind Annahmen gemacht, die nicht in der Übersicht oder der Tabelle stehen, z.B. dass zunächst die Kartoffeln und dann das Gemüse hergerichtet werden, bevor sie jeweils zubereitet werden.
Das erscheint aber aus zeitökonomischen Gründen sinnvoll, denn die Vorbereitung erfordert Handarbeit, die dann nicht parallel zur Verfügung steht.

Bevor das Fleisch in den Ofen geschoben (oder auf den Herd gestellt) werden kann, sind Tätigkeiten erforderlich, die parallele Arbeiten zunächst nicht zulassen.
Aber die dafür erforderliche Zeit ist nicht genannt und die parallelen Arbeiten erfordern weniger Zeit, sodass es keine Konflikte gibt.

Dass die Beilagen und das Fleisch möglichst zeitgleich fertiggestellt sein sollten, schreibt der Netzplan nicht explizit vor.
Aber er schließt es auch nicht aus, denn es gibt „Pufferzeiten" in den parallelen Strängen, die an eine geeignete Stelle geschoben werden können. Warmhalten steht nicht im vorliegenden Plan.

4. Kürzestmögliche Zeit:

Wir berechnen die Zeiten für jeden der vier Wege (von oben nach unten):

I: Tisch decken, Kartoffeln vorbereiten, Gemüse vorbereiten, Tee zubereiten, Teekanne auf den Tisch stellen: 40 + 10 + 0,5 = 50,5 (Minuten). Da der Tee vor dem Servieren der Speisen auf dem Tisch stehen soll, muss man die 5 Minuten Servierzeit noch dazu addieren: 55,5

II: Tisch decken, Kartoffeln vorbereiten, Gemüse vorbereiten, Kartoffeln zubereiten, servieren: (20 + 10 + 10) + 60 + 5 = 40 + 60 + 5 = 105 (Minuten) 105

III: Tisch decken, Kartoffeln vorbereiten, Gemüse vorbereiten, Gemüse dünsten, servieren: 40 + 15 + 5 = 55 (Minuten) 55

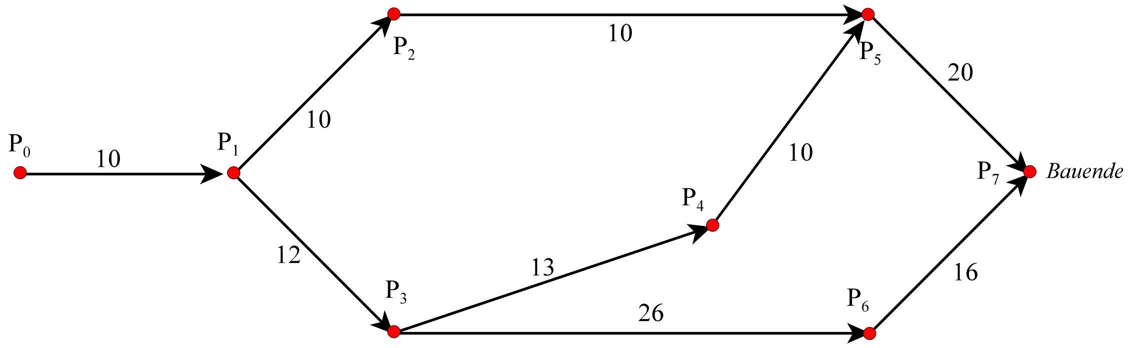
IV: Fleisch zubereiten, Fleisch tranchieren, servieren: 135 Minuten (s.o.) 135

Ersichtlich ist der Weg IV jener mit der längsten Zeit. Bis alles auf dem Tisch steht, wird es also mindestens 135 Minuten dauern.
Die Wege I und III haben Pufferzeiten von über einer Stunde, Weg II von 30 Minuten. Doch da die ersten drei Wege einen gemeinsamen Anfang haben, hängen die Pufferzeiten auch von der tatsächlichen Dauer der ersten drei Teilaufgaben ab.
Geschickterweise wird man beim Kochen die Pufferzeiten so zu legen versuchen, dass das tranchierte Fleisch, die Kartoffeln und das Gemüse nahezu zeitgleich fertig sind und serviert werden können. Den Tee serviert man vielleicht schon früher (z.B. nach der Ankunft der Freunde), er kann ja bereits nach etwa 50 Minuten fertig zubereitet sein.

Wir halten fest:
Der **längste Weg** gibt im Netzplan die **kürzestmögliche Zeit** an. Verzögert sich nur eine Teilaufgabe längs dieses Weges, so verzögert sich das Ende des Gesamtprojekts. Wegen der Pufferzeiten gilt dies nicht für Teilaufgaben auf kürzeren Wegen. Daher nennt man längste Wege im Netzplan auch *kritische Wege*.

Aufgabe 2

Der abgebildete Netzplan beschreibt ein Bauprojekt mit den Teilprojekten P_0, P_1, P_2, ... , die Zahlen auf den Kanten sind Arbeitstage.



a) Schreiben Sie den Netzplan geeignet als Tabelle.

b) Ermitteln Sie den längsten Weg und die zugehörige kürzestmögliche Gesamtdauer des Projekts.

c) Berechnen Sie für jedes Teilprojekt P_i den frühesten Beginntag, den spätesten Beginntag (sodass die Gesamtdauer nicht verlängert wird) und die jeweilige Pufferzeit.

Lösungsvorschläge:

a)

Teilaufgabe	Zeitdauer (Tage)	Vorgänger	Nachfolger
P_0	10	keine	P_1
P_1	10 (bis P_2) 12 (bis P_3)	P_0	P_2, P_3
P_2	10	P_1	P_5
P_3	13 (bis P_4) 26 (bis P_6)	P_1	P_4, P_6
P_4	10	P_3	P_5
P_5	20	P_2, P_4	P_7
P_6	16	P_3	P_7
P_7	Ende des Projekts	P_5, P_6	keine

b) Länge des Weges mit den Knoten P_0 P_1 P_2 P_5 P_7 = 10 + 10 + 10 + 20 = 50 (Arbeitstage)
Länge des Weges mit den Knoten P_0 P_1 P_3 P_4 P_5 P_7 = 10+12+13+10+20 = 65 (Arbeitstage)
Länge des Weges mit den Knoten P_0 P_1 P_3 P_6 P_7 = 10 + 12 + 26 + 16 = 64 (Arbeitstage)
Der Weg mit den Knoten P_0 P_1 P_3 P_4 P_5 P_7 ist mit 65 Arbeitstagen am längsten, 65 Abreitstage beträgt daher die kürzeste Dauer des Projekts.

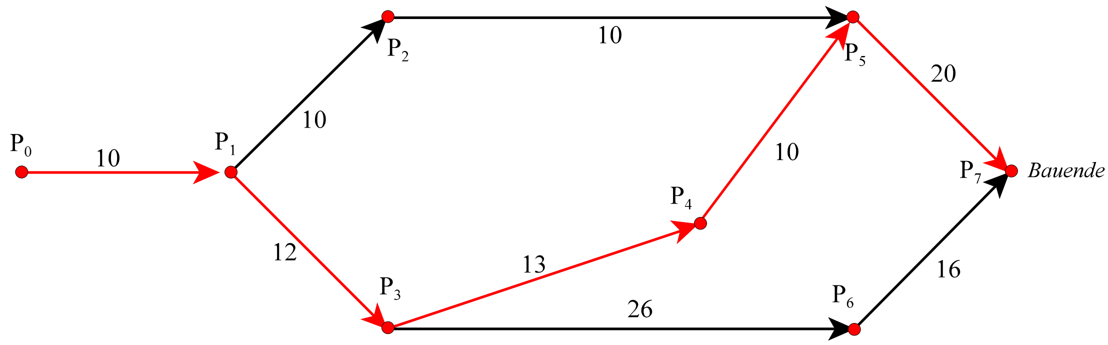


Abb. 5 · längster Weg in rot dargestellt

c) Projekte längs des kritischen Weges können keine Zeitverschiebung erfahren ohne die Gesamtzeit des Projekts zu verlängern:

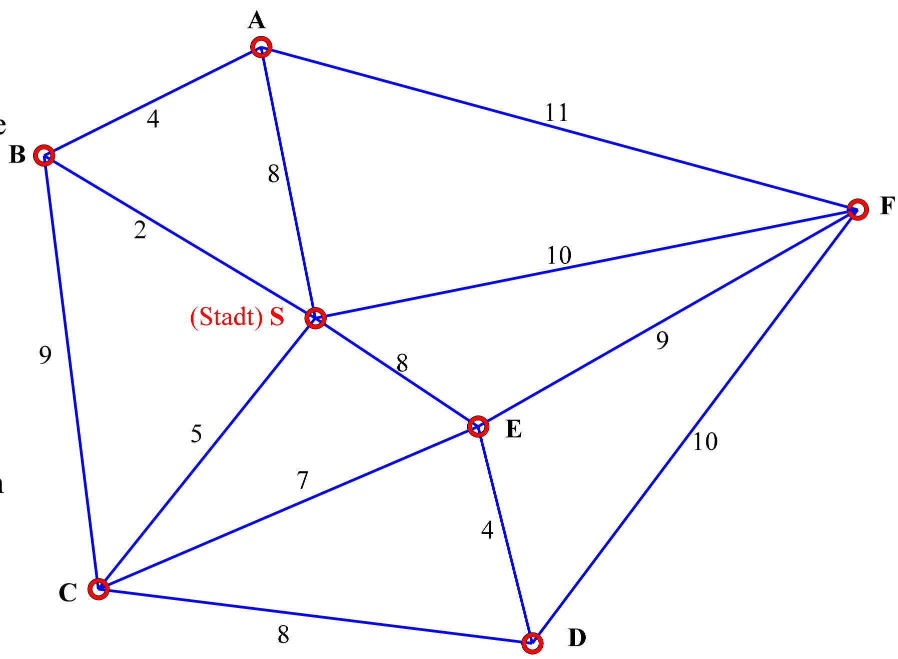
	frühester Beginn	spätester Beginn	Pufferzeit
P_1	am 11. Tag	am 11. Tag	0 Tage
P_2	am 21. Tag	am 36. Tag	15 Tage
P_3	am 23. Tag	am 23. Tag	0 Tage
P_4	am 36. Tag	am 36. Tag	0 Tage
P_5	am 46. Tag	am 46. Tag	0 Tage
P_6	am 49. Tag	am 50. Tag	1 Tag
fertig	am 65. Tag (Ende)		

Graphen · Paradigmatisches Beispiel:

Im abgebildeten Graphen stehen die Knoten (A bis F) für Ortschaften, S speziell für eine Stadt.

Die Kanten stellen jeweils die Verbindungsstraße zwischen zwei Ortschaften dar, die angegebene Bewertung ist jeweils die Länge der Straße (in km).

Die folgenden Fragestellungen basieren alle auf diesem Graphen.



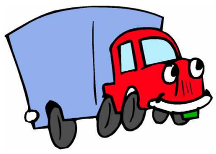
Aufgabe 3:

a) Frau Müller fährt jeden Tag von A nach D. Finden Sie den kürzesten Weg.

b) Eine Firma aus der Stadt S hat in jedem Ort eine Zweigstelle und möchte ein Computernetz aufbauen, sodass jede Zweigstelle mit der Zentrale in der Stadt S verbunden ist. Dabei müssen die Verbindungskabel entlang der vorgegebenen Straßen verlegt werden.

Bestimmen Sie die kürzeste Kabellänge, die die gewünschten Verbindungen herstellt, die nicht direkt zu sein braucht (es ist z.B. D mit S verbunden, wenn D mit E und E mit S verbunden ist).

c) Ein Lieferwagen verlässt täglich die Zentrale der Firma (aus Aufgabenteil b)) in der Stadt S und liefert Produkte in jede einzelne Zweigstelle. Anschießend fährt er in die Stadt zurück.



Bestimmen Sie den kürzesten Weg.

d) Die Straßenwacht überprüft regelmäßig die Oberflächen des Straßennetzes auf Beschädigungen. Das Fahrzeug zur Überprüfung ist in der Stadt S stationiert.

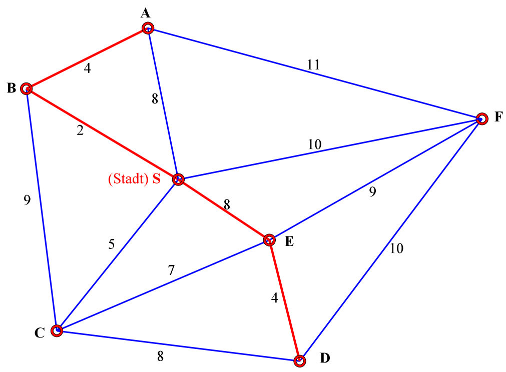
Finden Sie den kürzesten Weg für eine Überprüfungsfahrt, die von der Stadt ausgeht, über alle Straßen (mindestens einmal) führt und zur Stadt zurückkommt.

e) Versuchen Sie Ihre Idee zur Lösung von Teilaufgabe a) zu verallgemeinern, damit Sie auf beliebige andere Probleme des kürzesten Weges anwendbar ist.
Gelingt Ihnen dies nicht, so versuchen Sie den allgemeinen Algorithmus, den Sie von Ihrer Lehrerin bzw. Ihrem Lehrer erhalten haben, auf Teilaufgabe a) anzuwenden. Beschreiben Sie Unterschiede zu Ihrem Lösungsweg.

Lösungsvorschläge:

a) *Vermutlich listen die Schülerinnen und Schüler etliche der möglichen Wege auf:*

1. |Weg AFD | = 11 + 10 = 21 (km)
2. |Weg ASED| = 8 + 8 + 4 = 20 (km)
3. |Weg ABSED| = 4 + 2 + 8 + 4 = 18 (km)
4. |Weg ABCD| = 4 + 9 + 8 = 21 (km)
5. |Weg ABSCD| = 4 + 2 + 5 + 8 = 19 (km)



Der bisher kürzeste Weg ist ABSED mit 18 km.
Alle übrigen noch möglichen Wege (z.B. AFED, ASFD, ASFED) sind ersichtlich nicht kürzer,
daher ist der angegebene Weg tatsächlich ein Minimum, das hier sogar eindeutig ist.
Interessant ist, ob die Schülerinnen und Schüler eine relativ allgemeine Lösungsstrategie gewählt haben oder sich ganz von der vorliegenden (sehr einfachen) Aufgabe leiten ließen, was ja auch in Ordnung ist. Siehe dazu Teilaufgabe e).

Zur Übersicht bei der Lösung mithilfe des Graphen aber auch direkt zur Lösung kann eine

Tabelle dienen, in welche alle Knoten mit ihren jeweiligen Nachbarn eingetragen werden und der entsprechenden Distanz:

A	B	C	D	E	F	S
AB 4 AF 11 AS 8	BA 4 BS 2 BC 9	CB 9 CS 5 CE 7 CD 8	DC 8 DE 4 DF 10	ES 8 EC 7 ED 4 EF 9	FA 11 FS 10 FE 9 FD 10	SA 8 SB 2 SC 5 SE 8 SF 10

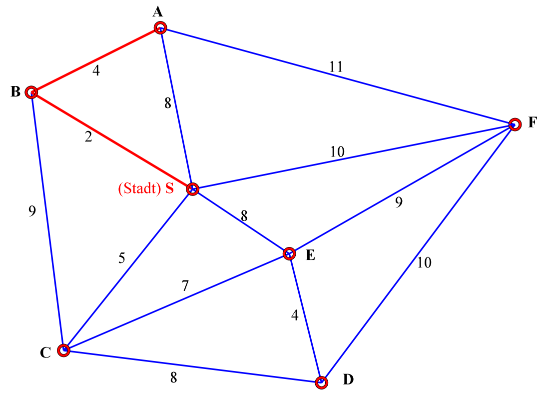
Diese Tabelle kann auch zur Berechnung der Anzahl aller möglichen Wege genutzt werden.

Benutzt man ein Computerprogramm zur Lösung der Frage nach dem kürzesten Weg, so ist die Darstellung als Matrix sinnvoll. Diese Matrix ist bei ungerichteten Graphen symmetrisch, in der Hauptdiagonalen stehen jeweils Nullen, da die Entfernung von einem Knoten zu sich selbst 0 ist. Das Unendlichzeichen bedeutet, dass diese Kante nicht existiert. In nebenstehender Matrix stehen die Spalten für A,B,C,D,E,F,S von links nach rechts und die Zeilen analog von oben nach unten.

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & \infty & \infty & \infty & 11 & 8 \\ 4 & 0 & 9 & \infty & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 9 & 0 & 8 & 7 & \infty & 5 \\ \infty & \infty & 8 & 0 & 4 & 10 & \infty \\ \infty & \infty & 7 & 4 & 0 & 9 & 8 \\ 11 & \infty & \infty & 10 & 9 & 0 & 10 \\ 8 & 2 & 5 & \infty & 8 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Es ist z.B. die folgende Strategie denkbar:

1. Als Startknoten nehmen wir z.B. S und von dort aus die kürzeste Kante, also SB.
2. Der von S oder B kürzeste Weg führt nach A, siehe nebenstehenden Graphen.
3. Der kürzeste Weg von einem der drei Knoten führt von S nach C.
4. Der kürzeste Weg, der in diesem Teilgraphen beginnt, führt nach E, siehe Abbildung 9.



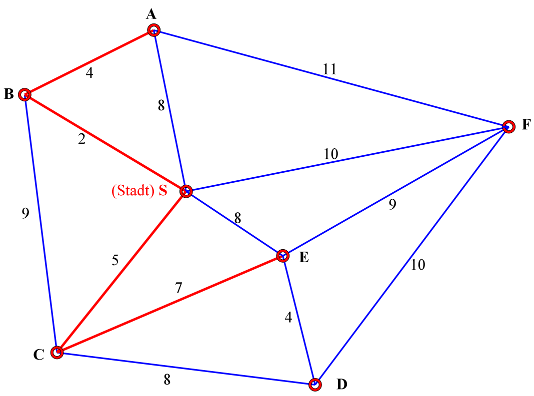


Abb. 9 · 4. Schritt im Algorithmus

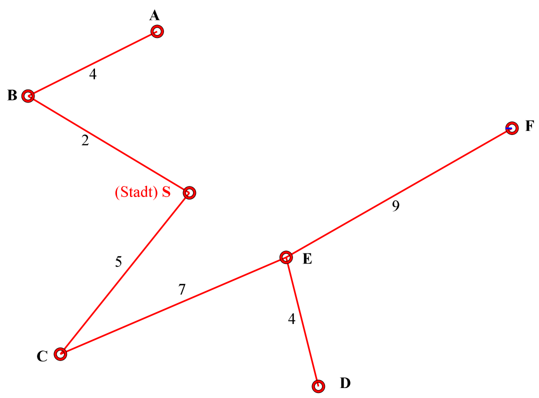


Abb. 10 · endgültiger Graph

5. Von diesem Teilgraph ist der kürzeste Weg zu einem Knoten, wo wir auch noch nicht waren, nach D.
6. Da wir nun nur noch nach F müssen, wählen wir die kürzeste Verbindung von E aus. Es ergibt sich der Graph aus Abbildung 10 mit einer (minimalen) Kabel-Länge von 31 km.

Auch zu diesem Problem des „minimalen Spannbaumes“ gibt es Algorithmen (siehe z.B. S. 14), Strategien der Schülerinnen und Schüler sind aber mindestens genau so wertvoll. „Baum“ ist die Bezeichnung für einen Graphen ohne Kreise, ein „Spannbaum“ enthält alle Knoten des Graphen.

c) Diese Teilaufgabe ist ein Beispiel für das „Problem des Handlungsreisenden“ („Travelling Salesman Problem“): gesucht ist ein minimaler Weg, der jeden Knoten mindestens einmal enthält.

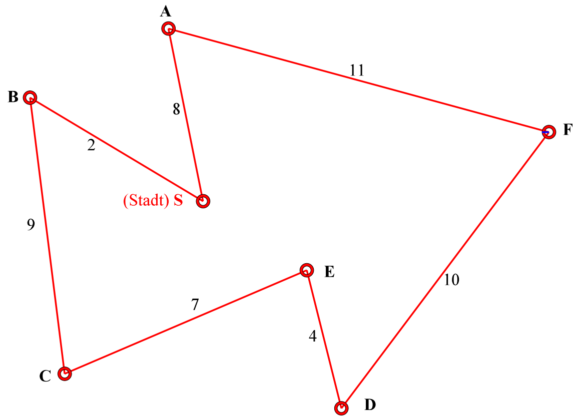
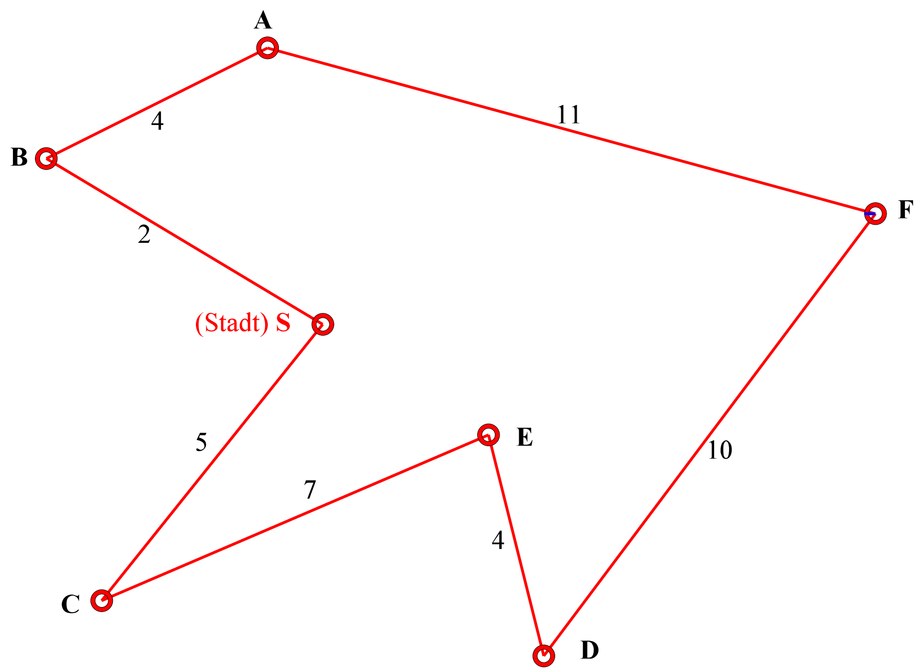
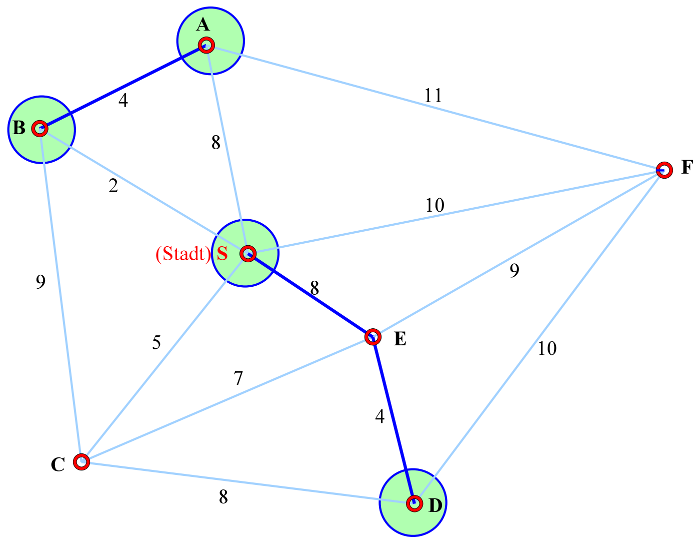


Abb. 11 · Beispiel für einen Hamiltonkreis

Solche Probleme sind zumeist sehr schwer zu lösen, da auch mit Computerhilfe erst eine Lösungsstrategie entwickelt werden muss. Berechnet man etwa die Länge aller Wege, die jeden Knoten nur einmal enthalten, so muss das nicht notwendig zum kürzesten Weg führen, da dieser eventuell einen oder mehrere Knoten mehrmals enthält, ganz abgesehen davon, dass die Anzahl möglicher Wege immens wächst und es so gar nicht sicher ist, dass der Computer diese Rechnung auch (in vertretbarer Zeit) bewältigen kann. Klar ist, dass die Länge eines geschlossenen Kantenzugs, der alle Knoten genau einmal enthält, sicher eine obere Grenze des kürzesten Weges darstellt. Diese *Kreis* heißt *Hamiltonkreis*. Ein solcher Hamiltonkreis ist in obiger Abbildung zu sehen; er hat die Länge 51. Ausgehend von einer solchen oberen Schranke kann man Verbesserungen vornehmen: Nach BS ist die kürzeste Verbindung nach S CS, dann kann auch AB in den Graphen aufgenommen werden. Eine mögliche Lösung wäre dann der Weg SBAFDECS mit einer Länge von 43 km:



d) Diese Teilaufgabe ist ein Beispiel für das „chinesische Briefträger Problem“: gesucht ist ein kürzester Weg, der alle Kanten wenigstens einmal enthält.

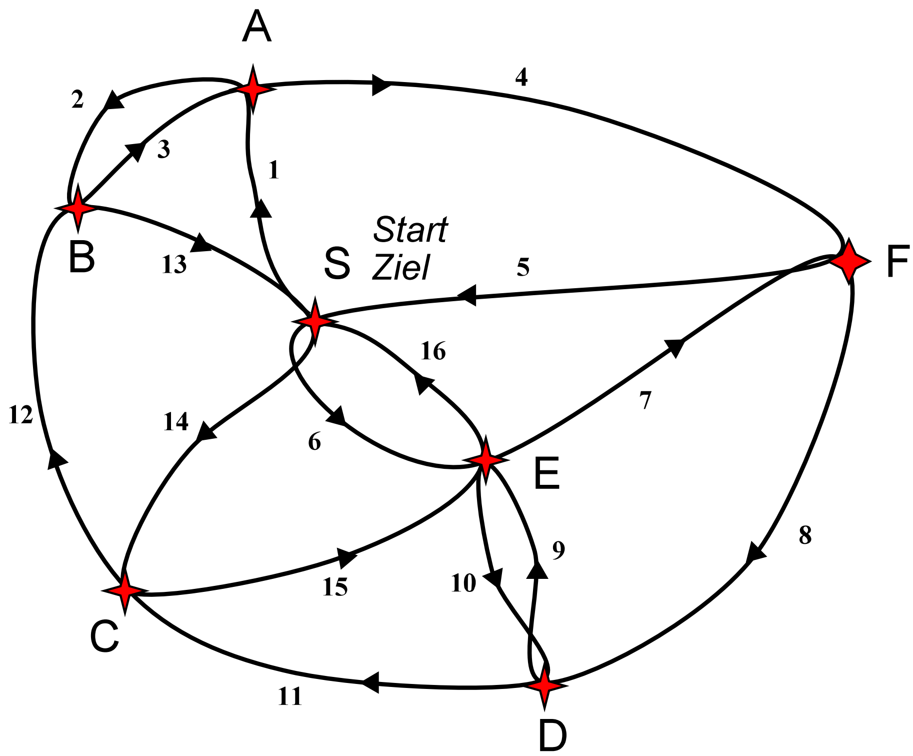


Beim vorgegebenen Graphen weisen die Knoten A, B, D und S eine ungerade Anzahl von Kanten auf, es muss also jeweils eine Kante zu diesen Knoten mehrmals durchlaufen werden und damit quasi eine gerade Zahl von anliegenden Kanten erzeugt werden *(sonst käme man bei einem Knoten nicht mehr weg oder nicht mehr an)*.

Wir wählen die Kanten AB, DE und SE, da sie die kürzesten Längen aufweisen.

Der kürzeste Weg hat daher die Länge aller Kanten zuzüglich der doppelt durchlaufenen: 95 + 16 = 111 (km). Jetzt muss man ihn nur noch angeben: SABAFSEFDEDCBSCES. Und in der folgenden Abbildung ist er auch zu sehen.

Abb. 14 · kürzester Weg für Teilaufgabe d): SABAFSEFDEDCBSCES

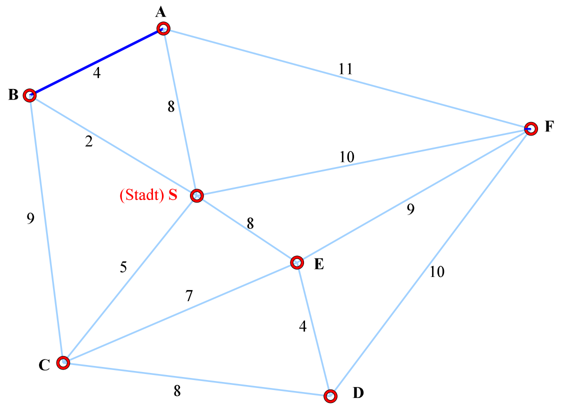


e) *Hier kann der Algorithmus von **Dijkstra** (oder entsprechende andere) vorgegeben werden, falls die Lernenden keine eigenen Strategien entwickeln konnten. Er befindet sich im Anhang der Aufgabenblätter und kann bei Bedarf auch daraus entfernt werden.*
Der Algorithmus von Dijkstra ermittelt bei einem bewerteten Graphen einen kürzesten Weg. Er erzeugt eine Lösung, indem das Problem stark reduziert und dann schrittweise zur eigentlichen Fragestellung hin ausgeweitet wird.

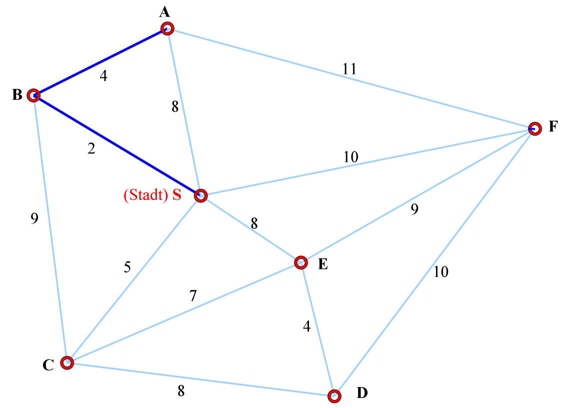
Wir erläutern den Algorithmus am Beispiel von Teilaufgabe a):

1. Vom Anfangsknoten A aus suchen wird den nächstgelegenen Knoten, das ist hier B. Man erhält so zusammen mit der Kante einen Teilgraphen G_1, den wir der besseren Übersicht halber farbig kennzeichnen.
2. Außerhalb des Teilgraphen G_1 suchen wir jetzt einen Knoten, der über eine Kante mit G_1 (farbig gekennzeichnet) verbunden ist und minimalen Abstand zu dem Anfangsknoten A hat. Das erfüllt jetzt S, denn $|ABS| = 6$. Möglich wären noch die Knoten C und F gewesen, jedoch ist $|ABC| = 13$ und $|AF| = 11$ jeweils größer als 6. Der bisher kürzeste Weg geht also über die Knoten ABS und die beschreiben zusammen mit den beiden zugehörigen Kanten den neuen Teilgraph G_2.
3. Den Schritt 2 wendet man jetzt auf den Teilgraphen G_2 an.
4. Das Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis der Endknoten D erreicht ist.

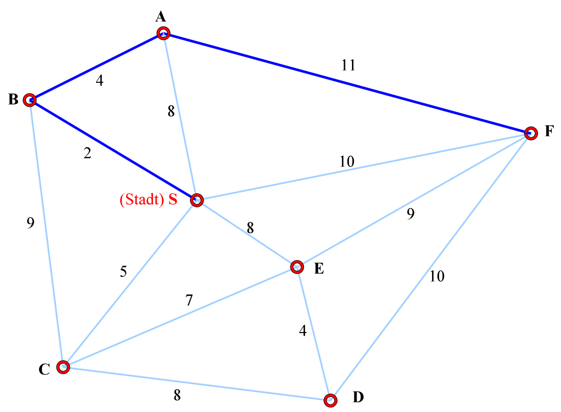
1. Schritt im Algorithmus



2. Schritt im Algorithmus, Weg von A nach S



3. Schritt im Algorithmus, Weg bisher von A nach S und F

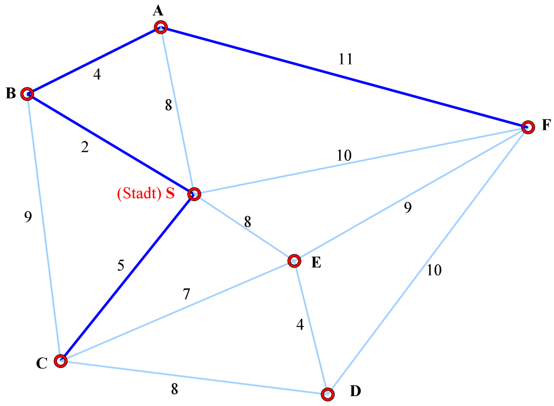


Wir beschreiben noch weitere Schritte, aufbauend auf G_2 (ABS): Mögliche Nachfolge-Knoten sind C, E, F, wobei z.T. zwei Kanten in Frage kommen: $|ABC| = 13$, $|ABSC| = 11$, $|ABSE| = 14$, $|ABSF| = 16$, $|AF| = 11$. Mit den Knoten F und C sind also gleiche minmale Gesamtlängen erreichbar, man entscheidet sich für einen der Knoten, z.B. F (siehe nebenstehende Abbildung).

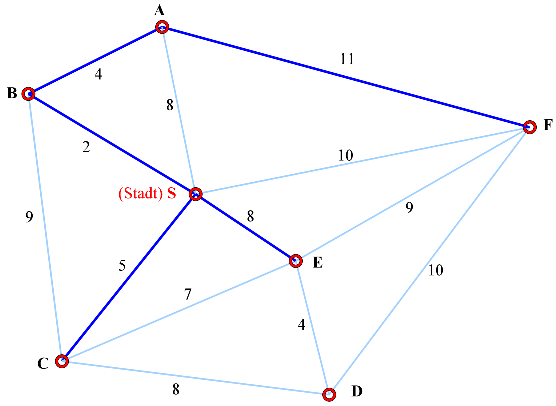
Ausgehend vom links markierten Graphen G_3 kommen als Nachbarknoten alle restlichen in Frage: $|ABSC| = 11$. Alle weiteren erlaubten Wege (ABC, ABSE, AFE, AFD) sind länger, daher wird jetzt C mit der Kante von S hinzugefügt.

Welcher Knoten mit welcher Kante wird jetzt zum Teilgraph G_4 hinzugefügt? Man sieht, dass sich nur bei E eine minimale Länge ergibt: $|ABSE| = 14$.

4. Schritt im Algorithmus, Vortasten nach C

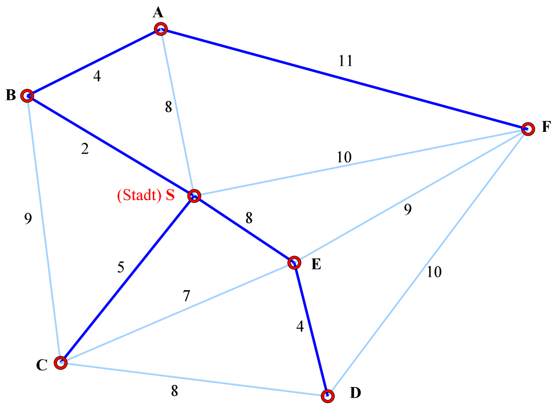


5. Schritt im Algorithmus, Vortasten nach E

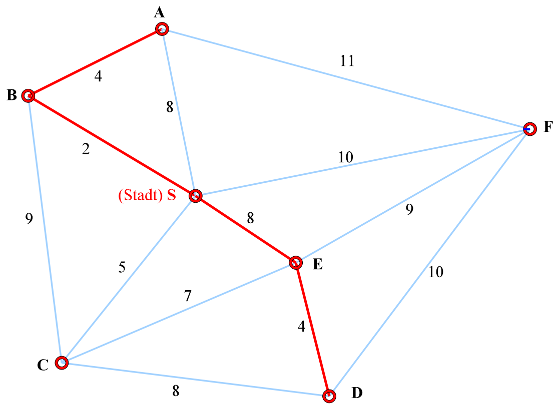


Nun kann nur noch der Knoten D hinzugefügt werden, der über die Kante von E aus minimale Entfernung ergibt: |ABSED| = 18. Damit ist der Algorithmus beendet.

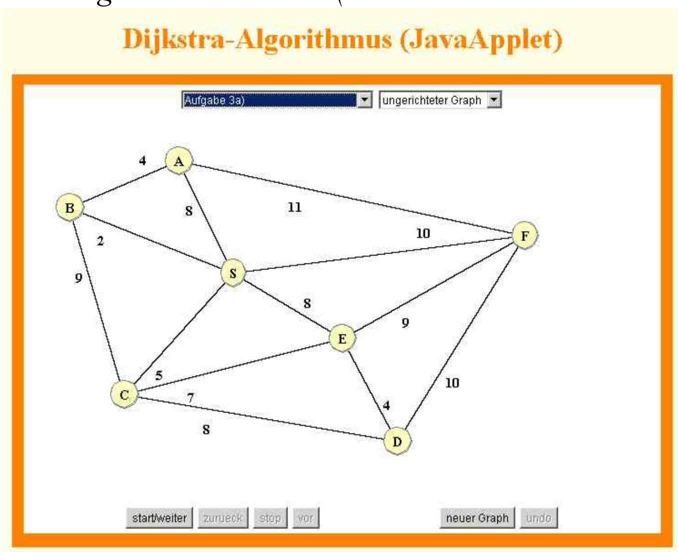
Letzter Schritt im Algorithmus, Ziel D ist erreicht



Kürzester Weg von A nach D (18 km)



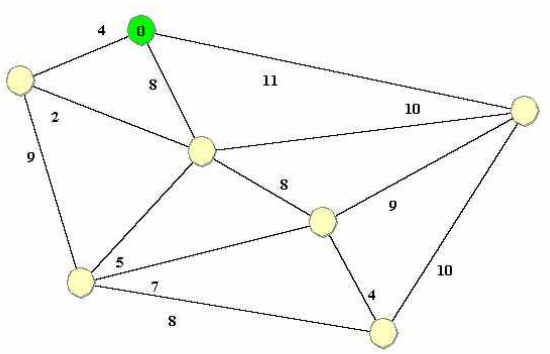
Es gibt die verschiedensten Formulierungen, vom allgemeinen Text wie im Anhang der Aufgaben bis zu einem „Pseudo-Code", wenn sich Lernende für Programmierung interessieren und/oder Informatik haben. Eine Formulierung findet man in [3] und [10]: Diese Formulierung des Algorithmus schreibt zu jedem Zeitpunkt die jeweiligen Entfernungen an die Punkte (was oben in der Tabelle anklingt), „inf" steht dabei für „unendlich".

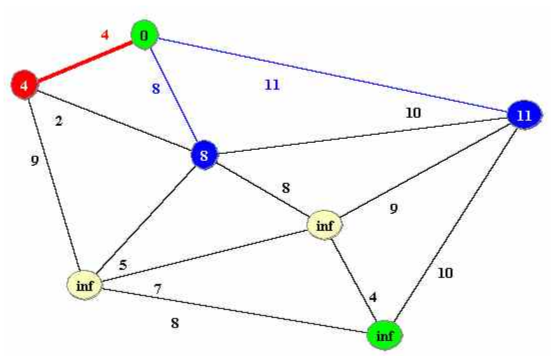


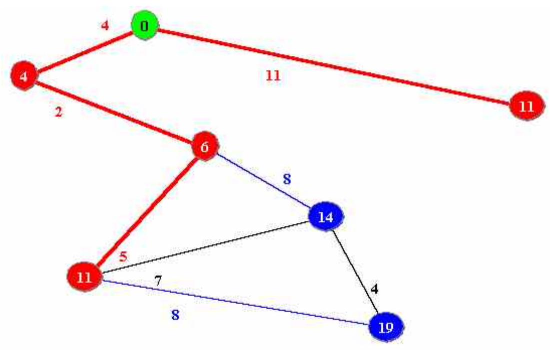
Graph vor Start des Programms

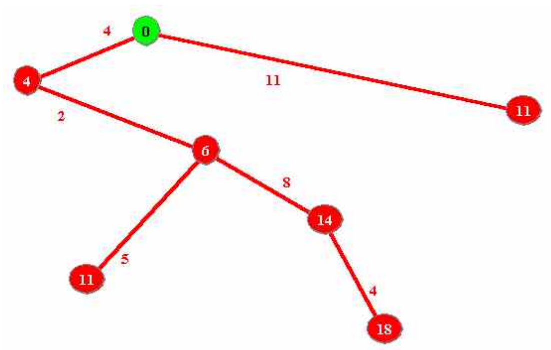
```
BEGIN
    S ← {s}, Distanz(s) ← 0
    FOR ALL v aus V\{s} DO
        Distanz(v) ← Abstand(s,v)
        Vorgänger(v) ← s
    END FOR
    WHILE z nicht in S DO
        finde v* aus V\S mit
        Distanz(v*) = min {Distanz(v): v aus V\S}
        S ← S ∪ {v*}
        FOR ALL v aus V\S DO
            IF Distanz(v*) + Abstand(v*,v) < Distanz(v)
            THEN
                Distanz(v) ← Distanz(v*) + Abstand(v*,v)
                Vorgänger(v) ← v*
            END IF
        END FOR
    END WHILE
END
```

In der graphischen Realisierung werden sogar längere Wege gelöscht.
In der folgenden Serie sind Bildschirm-Fotos vom Ablauf des Applets für das Problem von Aufgabe 3a) zu sehen:

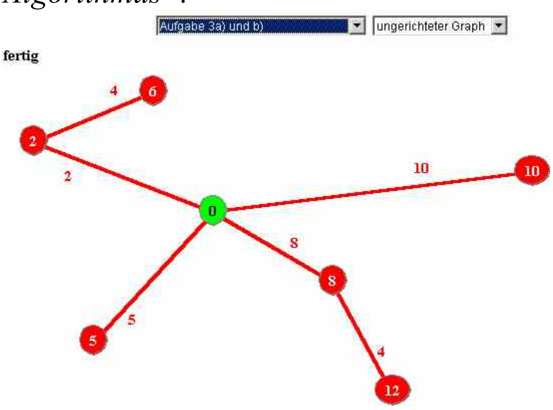




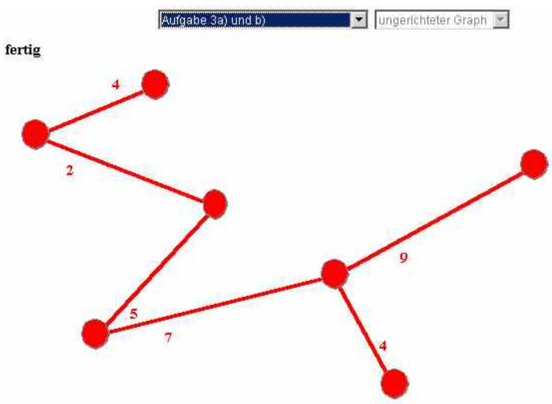




Interessant ist hier vielleicht, dass der Dijkstra-Algorithmus Aufgabe 3b) nicht lösen kann (er ist ja für dieses Problem auch nicht entwickelt worden), dafür aber z.B. der „Prim-Algorithmus“:



Dijkstra liefert als minimale Kabellänge 10+12+5+6 = 33

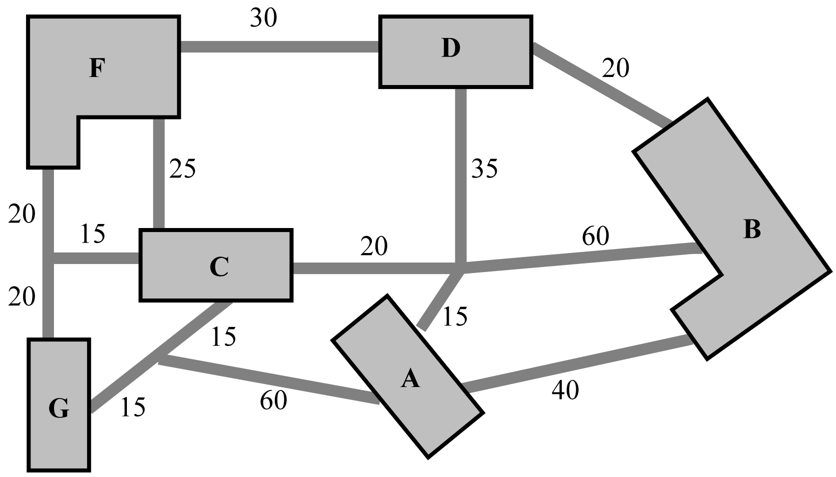


Prim liefert als minimale Kabellänge 9+4+7+5+2+4 = 31

Aufgaben

Aufgabe 4

Bauarbeiten (Teil 1)



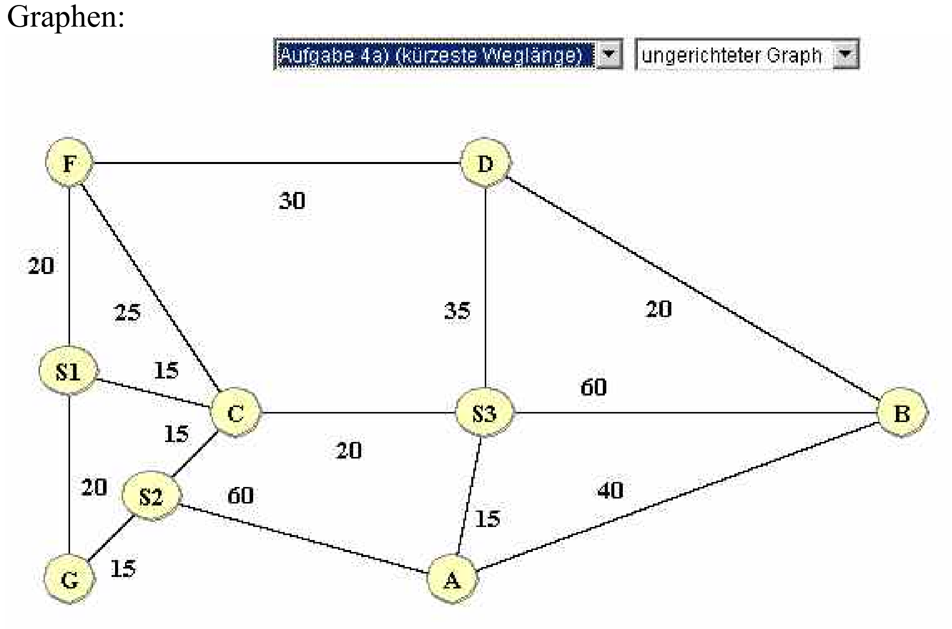
Die Abbildung zeigt einen möglichen Verlauf von überdachten Gehwegen in einer neuen Schule. Die Länge eines jeden Abschnitts ist (in m) angegeben, die Abbildung ist aber nicht maßstabsgerecht. Die Anlage pro Meter Gehweg kostet 400 €, hinzu kommen 5.000 € pro Weg für den Anschluss der Abflussrohre an die Drainage. Dabei benötigt jeder Abschnitt verbundener Wege einen eigenen Anschluss: die Wege, die sich zwischen den Gebäuden A, B, C und D kreuzen, benötigen also vier solcher Anschlüsse.
Die Schülerinnen und Schüler sollen von jedem Gebäude aus jedes andere erreichen können, ohne nass zu werden.

a) Finden Sie das kürzeste Wege-System.

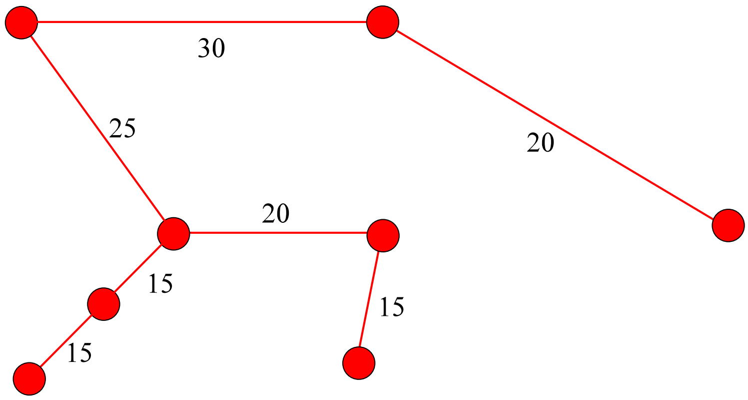
b) Finden Sie das preiswerteste Wege-System, und geben Sie die dafür anfallenden Kosten an.

<u>Lösungsvorschläge:</u>

a) Wenn wir die drei Schnittpunkte der Wege auch als Knoten wählen, erhalten wir z.B. diesen Graphen:



Der Nachteil dieser drei zusätzlichen Knoten ist, dass sie ja nicht wie Gebäude erreicht werden müssen. Löst man das Problem mit dem Computer, so muss man nachbessern, bei einer Lösung per Hand kann man dies gleich berücksichtigen:

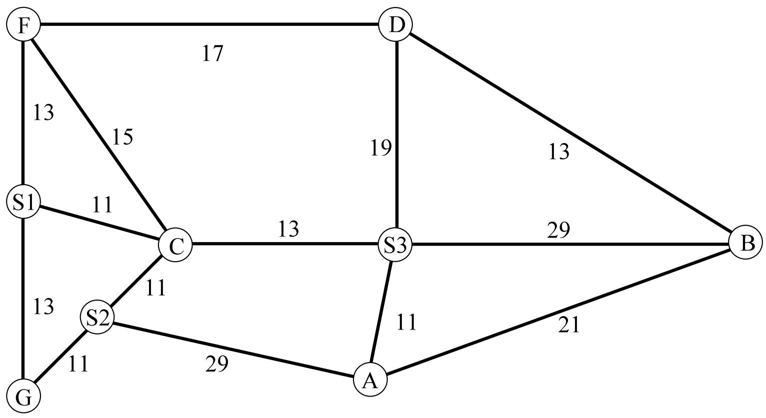


Die kürzeste Weglänge beträgt also 20+30+25+20+15+15+15 = 140 (m)

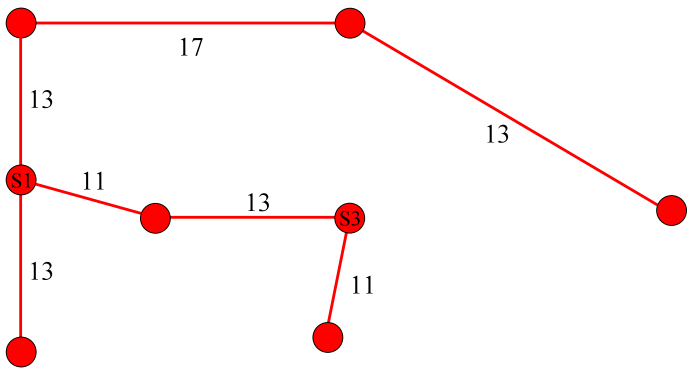
Eine weitere Lösung ist der als erste Lösung bei b) abgebildete Graph (aber mit den Gewichten aus a)).

b) Zunächst müssen die Kosten für die einzelnen Wegabschnitte berechnet werden. Diese Kosten werden dann als Kantengewicht eingetragen (in 1.000 €).

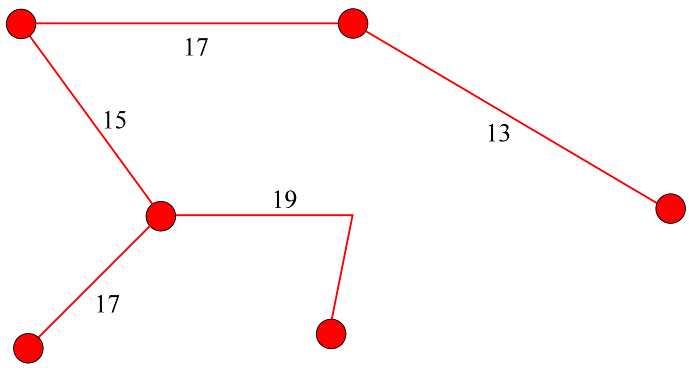
Die zusätzlichen Knoten müssen bei der Lösung ebenso beachtet werden wie im Teil a).



Ein preiswertestes Wegesystem ist nebenstehend abgebildet, die Kosten dafür belaufen sich auf 91.000 €. Allerdings ist der Knoten S3 gar nicht mehr nötig, es entfällt also einmal 5.000 € Anschlusskosten. Damit verbleiben 86.000 €.



Aber in dieser Lösung ist noch ein weiterer „künstlicher" Knoten (S1), der in der Lösung von Teilaufgabe a) entfallen würde. Damit reduzieren sich die Kosten auf 81.000 €.



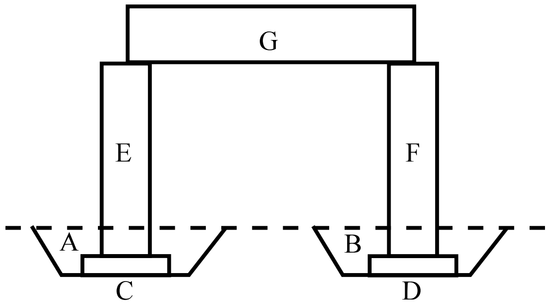
Ob die preiswerte Lösung „gut" im Sinne der Aufgabe des Wegesystems ist, sei dahin gestellt. Von Haus A nach Haus B ist es nun ein weiter Weg!

Aufgabe 5

Bauarbeiten (Teil 2)

Sie sind als Projektsteuerin für den termingerechten Bau einer Brücke verantwortlich. Sie haben von der Bauleitung nebenstehende Skizze erhalten und Sie wissen, wie viel Zeit für die einzelnen Arbeiten anzusetzen ist:

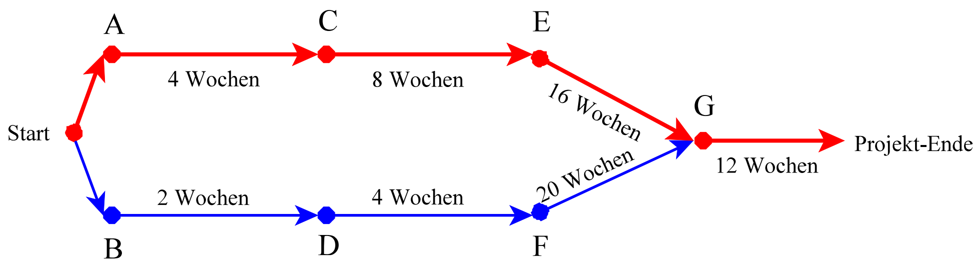
Vorgang	Bezeichnung	Dauer (Wo)
A	Baugrube A ausheben	4
B	Baugrube B ausheben	2
C	Fundament C herstellen	8
D	Fundament D herstellen	4
E	Pfeiler E herstellen	16
F	Pfeiler F herstellen	20
G	Überbau G herstellen	12



Welchen frühesten Termin für die Fertigstellung können Sie der Bauleitung vorschlagen, an welchen Stellen im Bau können Sie Anfangs- bzw. Endzeiten für Teilarbeiten etwas variieren?

Lösungsvorschläge:

Das Ausheben der beiden Baugruben, das Herstellen der Fundamente und der Pfeiler kann parallel erfolgen. Erst wenn beide Pfeiler stehen, kann mit dem Überbau begonnen werden.

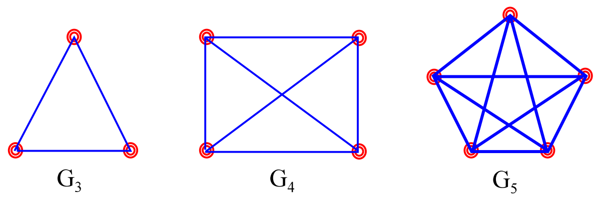


Der kritische Weg ist rot gekennzeichnet, vom Start bis E dauert er 28 Wochen, der parallele Weg vom Start bis F dauert 26 Wochen, die Pufferzeit ist hier also 2 Wochen. Entsprechend lässt sich der Baubeginn einzelner (oder aller) Vorgänge längs des unteren Weges verschieben.
Frühester Termin für die Fertigstellung ist 28 + 12 = 40 (Wochen) nach Baubeginn.

	frühester Beginn	spätester Beginn	Pufferzeit
A	1. Tag	1. Tag	0
B	1. Tag	nach 2 Wochen	2 Wochen
C	nach 4 Wochen	nach 4 Wochen	0
D	nach 2 Wochen	nach 4 Wochen	2 Wochen
E	nach 12 Wochen	nach 12 Wochen	0
F	nach 6 Wochen	nach 8 Wochen	2 Wochen
fertig	nach 40 Wochen		

Aufgabe 6

Die Aufgabe 3c) ist ein Beispiel für das „Problem des Handlungsreisenden“ („Travelling Salesman Problem“): gesucht ist ein minimaler Weg, der jeden Knoten mindestens einmal enthält.
Solche Probleme sind zumeist sehr schwer zu lösen, da auch mit Computerhilfe erst eine Lösungsstrategie entwickelt werden muss, weil die Anzahl möglicher Wege immens wächst und es so gar nicht sicher ist, dass der Computer diese Rechnung auch (in vertretbarer Zeit) bewältigen kann. Diese Schwierigkeit soll die folgende Aufgabe illustrieren.



a) Bestimmen Sie in den Graphen G_3, G_4 und G_5 jeweils die Anzahl der möglichen Wege, die an den Ausgangspunkt zurückkehren und dabei jeden anderen Knoten genau einmal erreichen.

b) Entwickeln Sie eine Formel für die Anzahl der in a) beschriebenen Wege für einen Graphen G_n (also mit n Knoten).

c) Wie viele solcher in a) beschriebenen Wege gäbe es im Graphen zu Aufgabe 3, wenn es direkte Verbindungsstraßen von einem Ort zu jedem anderen gäbe?

<u>Lösungsvorschläge:</u>

a) G_3 besitzt nur einen Weg, wenn man links bzw. rechts herum nicht doppelt zählt und die drei möglichen Startknoten beim Zählen verschiedener Wege nicht berücksichtigt.

Bei G_4 können am Start-Knoten 3 verschiedene Kanten gewählt werden, beim nächsten Knoten noch 2 Kanten. Beim dritten Knoten gibt es nur noch eine Möglichkeit, um zum Ausgangspunkt zurück zu kommen. Das waren jetzt insgesamt 6 Möglichkeiten. Zählt man die Wege, die sich nur durch die Laufrichtung unterscheiden nur einfach, gibt es nur noch halb so viele Wege, nämlich 3.

Bei G_5 zählt man analog: Zunächst 4, dann 3, dann 2 Möglichkeiten und zuletzt eine Möglichkeit, macht 24 verschiedene Wege. Unterscheidet man die Laufrichtung nicht, bleiben 12 verschiedene Wege.

b) Anzahl der verschiedenen Wege bei $G_n = \frac{1}{2} \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot (n-1)!$

c) Der Graph von Aufgabe 3 hat 7 Knoten. Falls es direkte Verbindungen zwischen jedem Paar von Knoten gibt, sind $\frac{1}{2} \cdot 6! = \frac{1}{2} \cdot 720 = 360$ verschiedene Wege möglich.
(In [3], S. 55ff, gibt es zur explosionsartigen Zunahme an Wegen ein ausführliches Beispiel, das auch auf die dann nötigen Rechenzeiten im Computer eingeht.)

Mathematik – Realität

In der Realität werden zumeist Graphen mit sehr vielen Knoten und Kanten verwendet. Das bedeutet, dass ohne den Einsatz eines Computers Lösungen nicht möglich sind. Die Aufgaben 3c) und 6) machten zudem etwas deutlich, dass trotz Rechnereinsatz eine Modellierung notwendig ist, die nicht zwingend eine optimale Lösung liefert.
In [4] wird die Suche nach dem kürzesten Weg am Beispiel des Behindertenfahrdienstes in Berlin konkretisiert. Eine Kurzfassung dazu findet sich in [5].
In [2], S. 248f, wird ebenfalls dieser Fahrdienst erwähnt, aber allgemein ein Überblick zu Optimierungsproblemen gegeben.
In [6] wird das Problem eines Hochregallagers modelliert, in dem der günstigste Weg für das Holen bestimmter Teile aus den Regalen gesucht ist. Das dort gewählte „dynamische Programmieren" findet konkret nicht zwingend ein Optimum, da bei der Modellierung Vereinfachungen vorgenommen werden. Auf der CD [7] werden einige der betrachteten Probleme (Problem des Handlungsreisenden, chinesisches Briefträger-Problem) als Anwendungsgebiete u.a. der Chip-Herstellung gezeigt. Es wird ebenso auf die Modellierung eingegangen.
Am Bau verwendete Netzpläne sind deutlich komplexer, als jene in den Aufgaben. Siehe z.B. [9].

Abschließende Aufgabe

Blicken Sie auf den Themenbereich „Graphen" zurück und verschaffen Sie sich einen Überblick:

- Beschreiben Sie die nach ihrer Meinung charakteristischen mathematischen Inhalte und, soweit dies möglich ist, bei welchem Sachkontext einer Aufgabenstellung diese sinnvoll angewendet werden können.
- Sehen Sie Verbindungen zu früheren Themen der Mathematik, zu anderen Fächern oder zu Sachverhalten außerhalb der Schule? Wenn ja, geben Sie diese an (auch unter Verwendung graphischer Mittel) und begründen Sie Ihre Angaben.

Dieser (ziemlich anspruchsvolle) „mathematische Aufsatz" kann auch z.B. in ein Lerntagebuch integriert im Laufe der Unterrichtsreihe entstehen.

Literatur

Quellen:

Aufgabe 1, 4: Ross Brodie / Stephen Swift · QMaths 12b
Moreton Bay Publishing Melbourne, 1996

Aufgabe 3, 6: [1] · Aufgabe 2: [2] · Aufgabe 5: [11]

Literartur / Software:

[1] Nigel Green · Unterrichtsvorschläge zur diskreten Mathematik · In: „mathematik lehren", Heft 84 (Oktober 1994), S. 60ff

[2] REICHEL, MÜLLER · Lehrbuch der Mathematik 5 · öbv&hpt, Wien 2002 · S. 184 - 199, *also 16 Seiten zu diesem Thema mit vielen Aufgaben*

[3] PETER GRITZMANN, RENÉ BRANDENBURG · Das Geheimnis des kürzesten Weges · Springer-Verlag, Berlin 2002. *Ein Roman zu diesem Thema mit viel Sachinformationen und Internetquellen.*

[4] RALF BORNDÖRFER, MARTIN GRÖTSCHEL, ANDREAS LÖBEL · Der schnellste Weg zum Ziel
In: Martin Aigner, Ehrhard Behrens (Hrsg.) · Alles Mathematik, Vieweg-Verlag, Braunschweig 2000, S. 45ff

[5] HANS-CHRISTIAN REICHEL, TOMAS KUBELIK · Über außermathematische Anwendungen der Mathematik · In: Arbeitskreis „Mathematik und Bildung“ (Hrsg.) · Mathematik – unsichtbar, doch allgegenwärtig · Polygon-Verlag, Eichstätt 2002, S. 99ff

[6] MathePrisma, Modul „Dynamisches Programmieren“
Eine sehr interessante Sammlung verschiedenster Module zu außermathematischen Anwendungen, die frei im Netz erhältlich ist: www.matheprisma.de

[7] ARITHMEUM · Klassische Probleme der Diskreten Mathematik und deren moderne Anwendungen · Springer-Verlag, Berlin (ohne Jahr) · *Multimedia-CD, z.T. interaktiv*

[8] OMEGA · Spektrum der Wissenschaft SPEZIAL 4/2003 · Schwerpunkt Graphentheorie:
Die im Artikel „Wie man Staus vermeidet“ (S. 26) angesprochene Aufgabe setzt die Aufgabe 3 (S. 8 hier in der Handreichung) sehr gut fort!

[9] BRIGITTE LUTZ-WESTPHAL · Wie komme ich optimal zum Ziel? · In: „mathematik lehren“, Heft 129 (April 2005), S. 56

Intenet-Adressen:

[10] http://www.math.tu-berlin.de/~westphal/projekt
Seite der Autorin von [9]

[11] http://www.blbs.de/archiv/vzeitschrift/text-pdf/unterr11-12.pdf
VOLKER KUHNE, DIRK NOOSTEN, ANTJE NOOSTEN · Netzplantechnik im Berufsschulunterricht
In: „Die berufsbildende Schule“ (BbSch) 54 (2002) 11–12, S. 347ff

[12] http://www-m9.ma.tum.de/ruth/linklist.de.html
Die Internetseiten der Autoren von [3]

[13] http://www-m9.ma.tum.de/dm/java-applets/routenplanung/
Eine Seite der TU-München mit Erklärungen und Applets zum Thema

[14] http://www-lehre.informatik.uni-osnabrueck.de/~graph/skript/skript.html
Vorlesung zum Thema „Graphenalgorithmen“, ausführliche Informationen

Zugehörige Dateien:

Aufgaben: *V2-Aufgaben (doc · pdf oder wpd)*

Autor: Winfried Euba
Lizenzgeber für die verwendeten Cliparts: Corel® (WordPerfect® Office, Micrografx®)

Zeitvorschlag: 15 Stunden (von 90)

V1	**V2**	**V3, V4 oder V5**	**V6**