V3 · Iteration

Übersicht

Inhalte

Dieser Themenbereich gibt einen kurzen Einblick in die Anwendung von Iterationsverfahren bei Wachstumsmodellen. Dabei wird lineares und exponentielles Wachstum betrachtet, das dann jedoch nur noch als Bauteil komplexerer Modelle auftaucht.
Im Mittelpunkt steht die Modellierung von Bevölkerungswachstum: anhand vorliegender Daten wird mittels Iteration eine Prognose für die Entwicklung der Bevölkerung in Deutschland bis zum Jahr 2050 erstellt und mit jener des Statischtischen Bundesamtes verglichen.

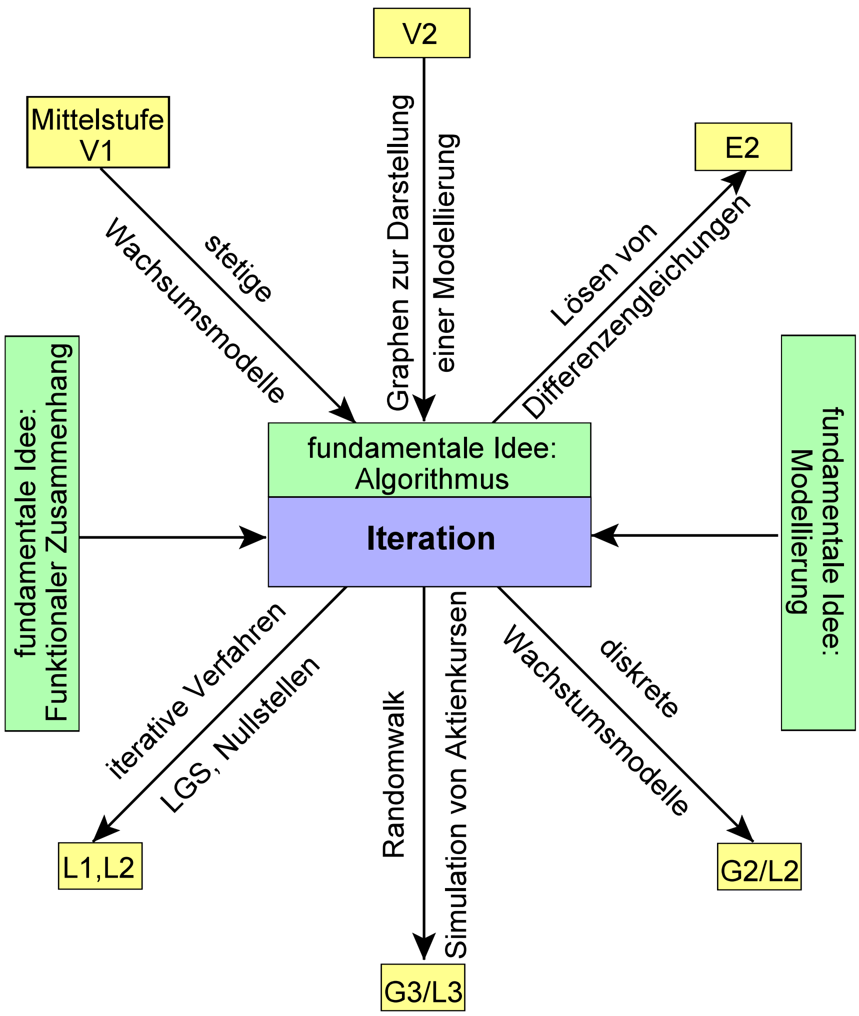
Methodische und didaktische Hinweise

Die Schülerinnen und Schüler kennen bereits Wachstumsmodelle und vielleicht sogar iterative Berechnungsverfahren z.B. für Nullstellen. Es geht nun zunächst darum, dieses Wissen über Wachstumsmodelle auf die diskrete Vorgehensweise zu übertragen und in der Modellbildung einzusetzen. Es ist daher sinnvoll, die meisten Aufgaben in Gruppen zu bearbeiten, damit Vorwissen und Kreativität besser genutzt werden.
Zu vier Aufgaben gibt es ein Arbeitsblatt für ein Tabellenkalkulationsprogramm. Dieser Sachverhalt ist in den Lösungsvorschlägen mit einem Taschenrechner gekennzeichnet (siehe dazu auch die Aufgabenübersicht auf der folgenden Seite sowie die Materialübersicht auf S. 14). Eine mögliche Definition von Iterationsverfahren ist im Anhang zu den Aufgaben abgedruckt.
Eine andere Möglichkeit zur Modellierung und rechnerischen Umsetzung sind auch Programme zur Beschreibung dynamischer Systeme wie Dynasys oder Vensim. Nachteilig ist hier jedoch, dass die Berechnung der Werte nicht iterativ geschieht, und die Rechenvorschriften z.T. in die Philosophie des Programms übertragen werden müssen. Außerdem berechnet die Tabellenkalkulation bei jeder Änderung eines Parameters alle Werte sofort neu und passt auch Diagramme unmittelbar an.
Die Beschreibung der Modellierung kann auch bei Verwendung einer Tabellenkalkulation mithilfe von Graphen geschehen (siehe Aufgabe 5, S. 8).
Im Zentrum stehen die beiden Aufgaben 5 und 6 zur Modellierung von Bevölkerungswachstum. Für diese Aufgaben sollte auf jeden Fall genug Zeit eingeplant werden, damit die Gruppen ihre Modelle entwickeln und auch erproben und modifizieren können. Besonders wenn einige Gruppen eigene Wege gehen, sollten die Gruppenergebnisse auch noch vorgestellt werden. Der Modellierungsprozess ist übrigens selbst in gewisser Weise iterativ.
Die Aufgaben 7 und 8 geben einen Ausblick auf weitere Aspekte. Dabei steht das Langzeitverhalten im Mittelpunkt, sodass auch eine der Aufgaben entfallen kann .
Nicht angesprochen wird das Thema Rekursion, weil im Sachkontext jeder „Zwischenwert“ eine Bedeutung hat und in der Tabellenkalkulation diese Werte auch alle vorliegen. Blickt man bei Aufgabe 8 tiefer ins Chaos, so wird man es aufgreifen müssen. Die Frage nach der „Konvergenz“ kann bei den Aufgaben 7 und 8 (auf präformalem Niveau) intensiver behandelt werden.
Die abschließenden Aufgabe sollte auf keinen Fall übergangen werden, da hier die Schülerinnen und Schüler den Themenbereich im Rückblick charakterisieren und mit ihnen bereits bekanntem Wissen vernetzen sollen. Dafür kann ein von jedem Lernenden individuell geführtes Lerntagebuch hilfreich sein.

Aufgabenübersicht:

Aufgabe		**Zugehörige Dateien** (Excel / Quattro Pro)
① Lineares Wachstum · Paradigmatisches Beispiel	S. 3	Arbeitsblatt: V3-01A · Lösungsvorschlag: V3-01L
② Selbst überlegte Aufgabe zu linearem Wachstum	S. 4	Zum Ersatzvorschlag V3-02A, V3-02L
③ Exponentielles Wachstum	S. 5	Arbeitsblatt: V3-03A · Lösungsvorschlag: V3-03L
④ Diskussion über Wachstumsmodelle	S. 6	
⑤ Bevölkerungsvorausberechnung Paradigmatisches Beispiel	S. 8	Arbeitsblatt: V3-05A · Lösungsvorschlag: V3-05L
⑥ Reflexion des Modells, Vergleich mit Werten vom Statistischen Bundesamt, Modifizierung des Modells	S. 9	Lösungsvorschlag: V3-06L
⑦ Ausblick: Langzeitverhalten, grafisches Iterieren	S. 11	Lösungsvorschlag: V3-07L
⑧ Ausblick: Langzeitverhalten, Chaos	S. 12	Arbeitsblatt: V3-08A · Lösungsvorschlag: V3-08L
Abschließende Aufgabe	S. 13	

Vernetzungen

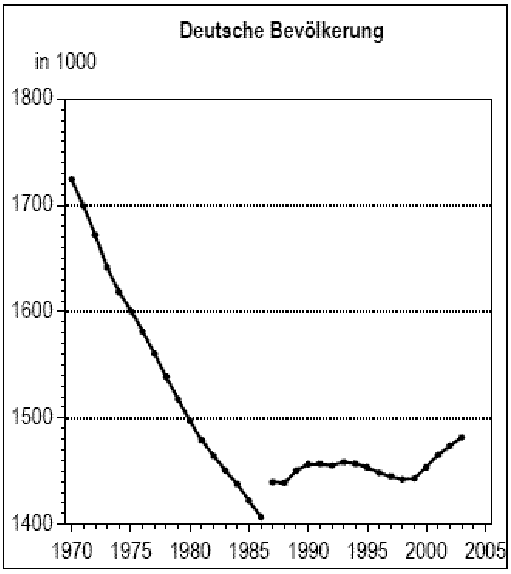


Jeder Lernende (und auch jeder Lehrende) muss und wird sich eigene Vernetzungen schaffen und konkret ausformen. Im Unterricht sollten aber dazu Angebote kommen: Nebenstehende Grafik gibt einen Überblick, in welchen Bereichen Vernetzungen im Prinzip wünschenswert sind.

Vorschläge für den Unterricht

Lineares Wachstum · Paradigmatisches Beispiel:

Im Statistischen Jahrbuch Hamburg 2004/2005 sind diverse Daten der Hansestadt zu finden, die zum Teil auch in Abbildungen visualisiert sind.
Da ist z.B. nebenstehende Abbildung zur Entwicklung der deutschen Bevölkerung in Hamburg, die eine lineare Abnahme zwischen 1970 und 1986 nahelegt. 1970 bestand diese Bevölkerungsgruppe aus 1 724 470 Personen, 1986 aus 1 406 699.



a) Beschreiben Sie die Entwicklung von Daten bei linearem Wachstum bzw. linearer Abnahme (negativem linearem Wachstum).

b) Ermitteln Sie aus den beiden oben genannten Zahlen und mit einem linearen Modell die zugehörigen Werte für 1971 bis 1985.
Hinweis zu den Daten des Jahrbuchs: „Die Bevölkerungsfortschreibung basiert auf der letzten Volkszählung von 1987 und bezieht kontinuierlich die natürliche Bevölkerungsbewegung (Geburten und Sterbefälle) und die räumliche Bevölkerungsbewegung (Zuzüge und Fortzüge) ein: Zu den Bestandsdaten aus der Volkszählung werden jährlich Geburten und Zuzüge hinzugerechnet sowie Sterbefälle und Fortzüge abgerechnet." Die Daten von 1970 basieren auf der Volkszählung in diesem Jahr und wurden vermutlich analog fortgeschrieben.

Beschreiben Sie, wie Sie bei der Berechnung vorgegangen sind.
Halten Sie Ihre Berechnungsmethode im Hinblick auf die eben angegebene Vorgehensweise im Jahrbuch für angemessen? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Deuten Sie auf der Grundlage der beschriebenen Fortschreibung der Daten den Wertesprung im Jahr 1987.

d) Vergleichen Sie Ihre „simulierten" Werte mit denen im Statistischen Jahrbuch und beurteilen Sie die Annahme negativen linearen Wachstums.

Datenquelle: www.statistik-nord.de

Lösungsvorschläge:

a) Die Daten ändern sich jeweils um denselben festen Betrag.

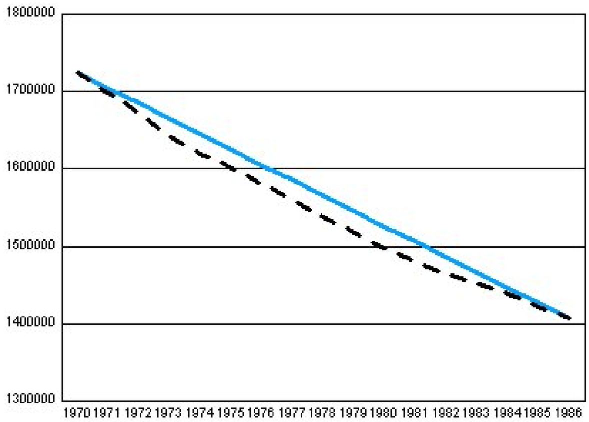
b) *Es liegen diskrete Daten vor, die mit dem linearen Modell simuliert werden sollen. Diese Daten basieren auf gelegentlichen Volkszählungen und werden dann mit den Informationen aus den Meldeämtern, wie oben beschrieben, fortgeschrieben.*

Natürlich ist es möglich, dies mit einer Funktionsgleichung für die entsprechende Gerade zu tun. Form und Entstehung der Daten legen jedoch ein iteratives Vorgehen nahe, das leicht mit einer Tabellenkalkulation durchgeführt werden kann.
Die Steigung innerhalb dieser Zeitspanne beträgt pro Jahr -19.861, die zu jedem vorher-

gehenden Wert addiert werden muss.

c) Der Wertesprung könnte die Fehler bei der Fortschreibung darstellen, denn der Wert 1987 basiert ja auf direkt ermittelten Zahlen.

d) Die Grafik im Lösungsvorschlag zeigt, dass das lineare Modell Abweichungen zu den realen Zahlen aufweist, die jedoch jeweils unter 2% bleiben. Das lineare Modell scheint also angemessen für den gewählten Jahresbereich.
In der Natur tritt lineares Wachstum relativ selten auf, Teilbereiche lassen sich jedoch oft linearmodellieren. Dabei ist zu bedenken, dass Prognosen ohnehin nur einen begrenzten Gültigkeitsbereich haben (vergl. z.B. V1 · Aufgabe 5).



Während oder nach der Auswertung von Aufgabe 1 sollte der Begriff Iteration und seine Bedeutung in diesem Zusammenhang geklärt werden.
Möglicherweise kann dies von einem oder mehreren Lernenden ausgeführt werden. Eine denkbare Beschreibung ist im Anhang zu den Aufgaben zu finden:

ITERATION

Ein Iterationsverfahren berechnet nach einer immer gleichen Methode aus einem (sicheren oder für gut befundenen) Startwert sukzessive weitere Werte. Bei den erfassten Bevölkerungszahlen wird ein sicherer Wert (Volkszählung) unter Verwendung anderer Informationen fortgeschrieben, man greift also bei der Ermittlung des Wertes für ein Jahr auf das vorhergehende zurück.
Ist das Verfahren sinnvoll, beschreiben diese Werte entweder alle einen bestimmten Sachverhalt, wie etwa die Bevölkerungszahlen für je ein Jahr, oder kommen einem gesuchten Wert mit jedem Schritt näher (kommt in diesem Themenbereich nur ansatzweise vor). Zum Einschätzen, ob das Verfahren sinnvoll ist, benötigt man hinreichende Kenntnisse zum Sachkontext, aber ebenso innermathematische Kenntnisse.
Langfristige Wetterprognosen werden z.B. iterativ ermittelt. Sie treffen um so eher zu, je besser die zugrunde liegenden Modelle für die jeweilige Wetterlage sind.

Aufgabe 2

Überlegen Sie sich eine Aufgabe zu linearem Wachstum in einem geeigneten Sachkontext .
Lösen Sie Ihre Aufgabe.

Hinweise: Als Sachkontext kann z.B. das Statistische Jahrbuch genutzt werden. So ist die Entwicklung der Anzahl der Sterbefälle im Zeitraum von 1970 bis 2003 annähernd linear. Der Zuwachs der ausländischen Bevölkerung kann eventuell auch linear modelliert werden, weist aber größere Unterschiede auf.

Auch Geburten und Sterbefälle (bezogen auf Deutschland von 1970 bis 1980) lassen sich annähernd linear modellieren (siehe dazu auch den Anhang zu den Aufgaben).

Aufgabe 3

Ein weiteres Modell für Wachstum ist <u>exponentielles Wachstum</u>, das Sie ja schon mehrfach im Unterricht behandelt haben.

a) Beschreiben Sie die charakteristische Eigenschaft von exponentiellem Wachstum.
Übertragen Sie diese Eigenschaft auf einen Iterationsschritt: Geben Sie an, wie man ausgehend von einem Wert den folgenden berechnet.

b) Nun soll das exponentielle mit dem linearen Wachstum verglichen werden.
Stellen Sie sich vor, dass eine Person 20.000 € auf einem Konto für 3 Jahre fest angelegen möchte, bei dem das Kapital im Jahr mit 11% verzinst wird und bei dem der Zinsertrag monatlich gutgeschrieben wird (und so Zinseszins erbringt – eigentlich ein klein wenig mehr als 11% im Jahr).
Nun erhält die Person ein Angebot, das Geld auf einem Konto anzulegen, bei dem es keine Zinsen gibt, dafür aber pro Monat 1% des Einlagewertes als Bonuszahlung, die jedoch auf dem Konto verbleibt.
Vergleichen Sie die beiden Angebote, indem Sie den monatlichen Kontostand iterativ ermitteln. Erstellen Sie eine Skizze mit beiden Kontoständen.
Die angegebenen Zinsen sind so hoch gewählt, dass man in der Skizze das exponentielle Wachstum gerade noch erkennen kann.

c) Geben Sie die beiden Funktionsgleichungen an, auf der die berechneten Punkte der jeweiligen Iteration liegen müssen.

<u>Lösungsvorschläge:</u>

a) Bei exponentiellem Wachstum ist der Zuwachs (oder die Abnahme) direkt proportional zum Bestand, bei der e-Funktion sogar gleich dem Bestand (→ lokale Änderungsrate, Ableitung).

Den Folgewert berechnet man durch Multiplikation des Ausgangswertes mit dem Wachstumsfaktor und anschließender Addition des Bestandes.

b)  Die Anlage mit Bonuszahlungen erbringt pro Monat 1% des Anlagebetrages, also 200 €. Diese Bonuszahlung wird somit jeweils zum vorhergehenden Kontostand addiert.

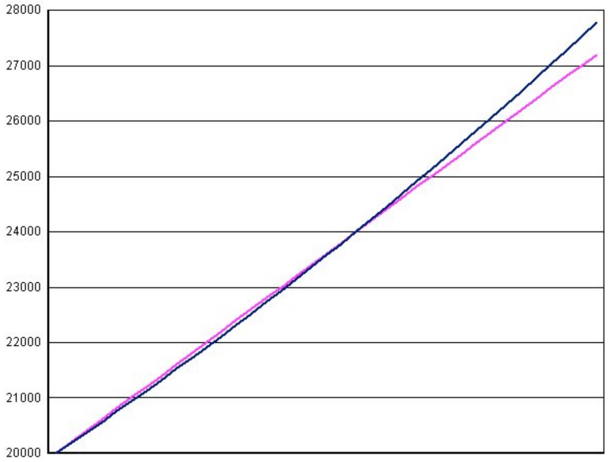
Der Zins je Monat ist ein Zwölftel von 11%, gerundet also 0,009167. Der neue Kontostand ist daher „Kontostand-Vormonat mal 1,009167“. Der Unterschied nach 3 Jahren liegt bei 577,57 €.
Das Zinskonto „überholt“ das Bonuskonto erst im 20. Monat.

@ { } +C5*D6

B	C	D	E	F
gabe 3				
hlag				
Kontostand				
Bonus	Zinsen			
20.000,00	20.000,00	200,00	Bonus	
20.200,00	20.183,33	1,009167	Zinsberechnung	
20.400,00	20.368,35	577,57	Unterschied	
20.600,00	20.555,06		nach 3 Jahren	
20.800,00	20.743,48			
21.000,00	20.933,63			
21.200,00	21.125,52			
21.400,00	21.319,17			
21.600,00	21.514,59			
21.800,00	21.711,81			
22.000,00	21.910,84			
22.200,00	22.111,69			
22.400,00	22.314,38	1. Jahr		
22.600,00	22.518,93			
22.800,00	22.725,35			

Es gibt Konten, bei denen monatlich anteilig Zinsen gutgeschrieben werden und die in den Folgemonaten ebenfalls Zinsen bringen. Der Jahreszins ist aber deutlich niedriger.

Durch den nach wie vor recht schwachen Anstieg beim exponentiellen Wachsen ist der Unterschied zwischen linearem und exponentiellen Wachstum bei der gewählten Skalierung nur schwach ausgeprägt. Das lineare Modell ist also auch hier für viele Monate eine gute Näherung (→ Änderungsrate).



Graphen der Punktfolge kontinuierlich ergänzt

c) Die Einheiten der x-Achse sollen Monate bedeuten.
Die Gerade (als kontinuierliches Modell) hat die Steigung 200 und den y-Achsenabschnitt 20.000 und daher die Gleichung

$$g(x) = 200\,x + 20.000.$$

Die zum exponentiellen Wachstum gehörende Kurve wird beschrieben durch die Gleichung

$$ew(x) = 20.000 \cdot (1{,}009167)^x.$$

Schülerinnen und Schüler könnten dies, wenn sie unsicher sind, auch mit Derive testen und die Graphen dort mit der Abbildung aus der Tabellenkalkulation vergleichen.

(Vermutete) Ursachen für Bevölkerungsentwicklung sind vielfältig, ebenso die möglichen Auswirkungen. Daher sind auch die Modelle zur Prognose von Bevölkerungsentwicklung komplex: Sie unterteilen die zu untersuchende Bevölkerung in verschiedene Gruppen, für die jeweils unterschiedliche Entwicklungsmodelle gewählt werden. Um dies ansatzweise den Schülerinnen und Schülern zu verdeutlichen, könnten z.B. ausgewählte Zeitungsartikel hilfreich sein.
Vier Blätter mit Artikeln aus dem Hamburger Abendblatt, die diesen Aspekt und auch andere behandeln, stehen als PDF-Datei bereit (siehe die Tabelle auf Seite 14).

Aufgabe 4

Sie haben verschiedene Texte erhalten, die sich mit Aspekten der Bevölkerungsentwicklung beschäftigen. Diese Texte sollen Ihnen helfen, eine Vorstellung davon zu bekommen, wie Bevölkerungsentwicklung sinnvoll modelliert werden könnte.

a) Erstellen Sie eine kurze Inhaltsangabe jedes Textes unter besonderer Berücksichtigung von Informationen, die sich auf eine sinnvolle Modellierung beziehen.

b) Skizzieren Sie ein nach Ihrer Meinung prinzipiell sinnvolles Modell und begründen Sie Ihre Überlegungen.

Hinweise:

a) *Den Schülerinnen und Schülern sollte klar werden, dass Modelle zur Bevölkerungsentwicklung komplex sind, also im Allgemeinen nicht für die gesamte Population etwa exponentielles Wachstum verwendet werden kann. Zum einen entwickeln sich bestimmte Gruppen verschieden, zum anderen hängt die Modellierung auch von möglichen Fragestellungen ab.*

b) *Die Vorschläge hängen sicher von den verteilten Texten ab. Es sollte versucht werden, Vorschläge aufzugreifen, sofern die dazu nötigen Daten beschafft werden können. Sinnvoll ist es auch, zunächst mit einem einfacheren Modell zu beginnen, das dann modifiziert werden kann (siehe die folgende Aufgabe 5).*

In der nachstehenden Aufgabe wird die Modellierung zur Entwicklung der Bevölkerung in Deutschland mit einem in Ansätzen komplexen Modell versucht, das auf realen Daten basiert. Dazu wird die Bevölkerung in vier Altersgruppen eingeteilt, nämlich die Gruppe der 0 bis 14 Jährigen, der 15 bis 49 Jährigen, der 50 bis 64 Jährigen und der ab 65 Jährigen.
Die 2. Gruppe ist so gewählt, weil in der „10. koordinierten Bevölkerungsvorausberechnung" des Statistischen Bundesamtes (http://www.destatis.de/d_home.htm) aus dem Jahr 2003 die Geburtenhäufigkeit als durchschnittliche Anzahl der Kinder einer Frau zwischen ihrem 15. und 49. Lebensjahr angegeben ist.
Im Modell gibt diese Zahl den Zuwachs der 1. Gruppe an. Ansonsten bestimmt das Alter den Übergang zur nächsten Gruppe, abzüglich der jeweiligen Sterberate.
Die Daten für die Bevölkerungszahlen von 2002 stammen aus der Alterspyramide des Statistischen Bundesamtes (© Daten: Animierte Bevölkerungspyramide zur 10. koordinierten Bevölkerungsvorausberechnung Statistisches Bundesamt, Wiesbaden 2003, http://www.destatis.de/basis/d/bevoe/bev_svg2.htm), sie liegen auch als Excel- und Quattro Pro-Tabelle vor. Die Animation benötigt zum Ablaufen den SVG Viewer von Adobe, der in den Browser eingebunden wird (Download für diesen Viewer – auch in Deutsch http://www.adobe.com/svg/viewer/install/main.html).
Die Werte der Sterberaten basieren schließlich auf der Sterbetafel 2001/2003 vom Statistischen Bundesamt, die zur leichteren Bearbeitung wieder als Excel- oder Quattro Pro-Datei vorliegt. Die konkrete Berechnung der Werte für die oben beschriebenen Gruppen ist in der Datei sichtbar. Es handelt sich um Durchschnittswerte, auch hinsichtlich der Geschlechter.

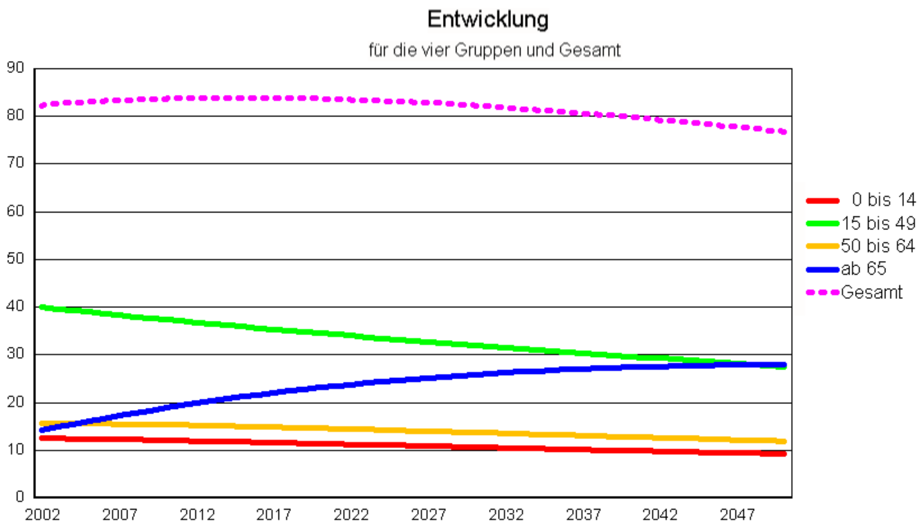


Diagramm zu nachfolgender Modellierung

Sollte von Lernenenden in Aufgabe 4 ein alternativer Vorschlag für ein Modell gemacht worden sein, der realisierbar erscheint, so kann dieser auch gut parallel zu Aufgabe 5 von einer Gruppe erarbeitet werden. Ein anschließender Vergleich der beiden Modelle kann eventuell Aufgabe 6 b) und c) ersetzen.

Bevölkerungsvorausberechnung · Paradigmatisches Beispiel:

Die Entwicklung der Bevölkerungszahlen in Deutschland soll mit realistischen Daten modelliert werden. Die Vorhersage basiert auf den Zahlen aus dem Jahr 2002 und Sie sollen eine Vorhersage bis zum Jahr 2050 berechnen. So ist ein Vergleich Ihrer Berechnungen mit jenen des Statistischen Bundesamtes aus dem Jahr 2003 möglich.

Zu dieser Aufgabe gibt es ein Arbeitsblatt für ein Tabellenkalkulationsprogramm, das Sie zur Berechnung verwenden können und auf dem Sie die nötigen Daten finden:

Daten	
Geburtenziffer	1,4000
0-14 -->> 15-49	0,0667
15-49 -->> 50-64	0,0286
50-64 -->> ab 65	0,0667
Sterberate 0 bis 14	0,0004
Sterberate 15 bis 49	0,0011
Sterberate 50 bis 64	0,0067
Sterberate ab 65	0,0276

	Zahlenangaben in Millionen				
Jahr	**0 bis 14**	**15 bis 49**	**50 bis 64**	**ab 65**	**Gesamt**
2002	12,4	40,2	15,5	14,4	82,5

Die Bevölkerung in Deutschland ist in 4 Altersgruppen eingeteilt. Ihre Größe im Jahr 2002 ist in die Tabelle eingetragen, die Summe (= Gesamtzahl) wird berechnet. Ihre Aufgabe ist es jetzt, sich anhand der Daten rechts oben die Übergänge der Gruppen ins nächste Jahr zu überlegen.

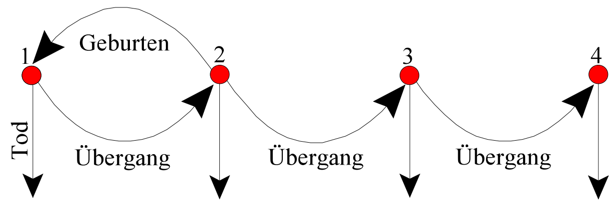
Erläuterung der Daten:

Geburtenziffer: Die Geburtenhäufigkeit wird vorrangig mit der „zusammengefassten Geburtenziffer" quantifiziert. 1,4 gibt damit die durchschnittliche Kinderzahl jeder Frau im Laufe ihres Lebens an. Statistisch werden Kinder zwischen dem 15. und 49. Lebensjahr der Frau geboren.

0-14 -->> 15-49 und die folgenden 2 Zeilen geben den Übergangsanteil der links stehenden Gruppe in die rechts stehende an. Die drei Zahlen sind eigentlich die Brüche 1/15, 1/35 und wieder 1/15.

Sterberate ist der Anteil der Toten pro Jahr für die jeweilige Gruppe.

Die 2., 3. und 4. Gruppe erhält „Zuwachs" durch den Übergang aus der jeweils vorherigen Altersgruppe. Sie wird vermindert um die Anzahl der Toten und bei den Gruppen 2 und 3 auch um diejenigen, die in die nächste Gruppe übergewechselt sind.
Das letzte gilt auch für die 1. Gruppe, jedoch erhält diese den Zuwachs über die Geburtenziffer.



Auftrag:

a) Versuchen Sie jetzt die Berechnung des Modells.

b) Erstellen Sie mindestens ein Diagramm zu einem für Sie interessanten Aspekt Ihres Modells und erfinden Sie dazu eine geeignete Überschrift, wie sie in einer Zeitung stehen könnte.

Lösungshinweise:

a)  Die Übergänge der Gruppen berechnen sich wie folgt:

1 (0 - 14): alter Wert * (1 − Übergangsrate − Sterberate) +
alter Wert (Gruppe 2) * 0,5 * Übergangsrate (2 nach 3) * Geburtenziffer

Erklärung zum 2. Summanden:

- *0,5 bedeutet die Annahme einer Frauenquote von 50%*
- *Übergangsrate (2 nach 3) stellt sicher, dass in den 35 Jahren, die diese*

Gruppe umfasst, rechnerisch jede Frau nur einmal 1,4 Kinder zugeteilt bekommt

2 (15 - 49): alter Wert * (1 − Übergangsrate − Streberate) +
alter Wert (Gruppe 1) * Übergangsrate (1 nach 2)

3 (50 - 64): alter Wert * (1 − Übergangsrate − Streberate) +
alter Wert (Gruppe 2) * Übergangsrate (2 nach 3)

4 (15 - 49): alter Wert * (1 − Streberate) +
alter Wert (Gruppe 3) * Übergangsrate (3 nach 4)

Kommen Geburtenziffer oder Streberaten bei der Berechnung vor, sollte die zugehörige Zelle und nicht der Zahlenwert in die Formel eingetragen werden, damit später einfach verschiedene Szenarien erprobt werden können, z.B. die Entwicklung bei anderer Geburtenziffer.

b) *In der Datei mit den Lösungsvorschlägen sind zwei Diagramme, welche die Entwicklung der Altersstruktur zeigen. Vielleicht haben Schülerinnen und Schüler jedoch ganz andere Ideen...*

In der folgenden Aufgabe soll das Modell in obiger Aufgabe näher betrachtet und schließlich modifiziert werden.

Aufgabe 6

Diese Aufgabe bezieht sich noch auf das Modell zur Bevölkerungsentwicklung in Deutschland.

a) Beschreiben Sie den Grundgedanken für das oben verwendete Modell.
Klären Sie, woher die Brüche in den Übergangsraten kommen und ob in diesem Modell exponentielles Wachstum enthalten ist oder nicht.

b) Vergleichen Sie die Ergebnisse Ihres Modells mit den Ergebnissen des Statistischen Bundesamtes.
Benennen Sie mögliche Ursachen für Abweichungen.

c) Schlagen Sie aufgrund Ihrer Überlegungen in b) eine Modifizierung des Modells vor, klären Sie, ob die dazu nötigen Daten beschafft werden können, und versuchen Sie ihr Modell zu realisieren.

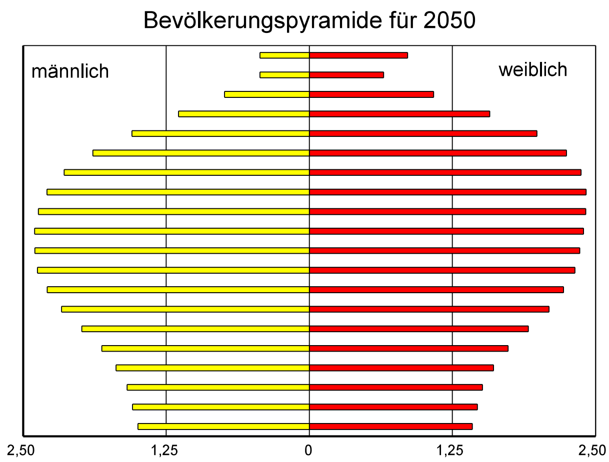
Lösungsvorschläge:

a) Die Gesamtbevölkerung ist in Altersgruppen aufgeteilt, wobei für jede Gruppe verschiedene Entwicklungsmodelle genommen werden. Diese Entwicklungsmodelle beziehen jeweils eine Nachbargruppe mit ein.
Die Brüche entstehen durch die „Taktrate“ Jahr und die Spannweite der jeweiligen Gruppe: Jedes Jahr wechselt die Personenzahl, die altersmäßig aus der Gruppe fällt, in die nachfolgende. Bei Gruppe 1 und 3 also 1/15 und bei Gruppe 2 1/35 der Gruppenmitglieder. Dabei wird jedoch angenommen, dass von jedem Alter in der Gruppe gleich viele Personen vorhanden sind.
Die Übergangsformeln enthalten zwei Summanden, von denen jeder für sich exponentielles

Wachstum beschreibt, jedoch bezogen auf verschiedene Grundmengen.

b) Die Gesamtzahl im Modell mit 76,9 Millionen stimmt gut mit der mittleren Variante vom Statistischen Bundesamt überein (75,1 Millionen), die Endzahlen der Gruppen sind nicht so leicht zu vergleichen, weil in der Veröffentlichung andere Einteilungen vorgenommen wurden. Sie scheinen tendenziell übereinzustimmen.
Ein Vergleich mit den Werten des U.S. Bureau of the Census (Link siehe S. 14) ist aber möglich. So weisen die beiden unteren Altersgruppen in dieser Prognose etwa gleiche Werte wie im Modell von Aufgabe 5 auf, die Altersstufen 50 bis 64 (14,3 gegen 11,9) und ab 65 (22,1 gegen 28,1) weichen jedoch deutlich voneinander ab. Die Gesamtzahl ist mit 73,6 Millionen um 3 Millionen niedriger.
Ursachen für Abweichungen sind z.B.
- die grobe Einteilung der Bevölkerung in Altersgruppen
- das Zusammenlegen der Geschlechter
- keine Berücksichtigung des „Wanderungsgewinns“ (s.u.)
- Änderungen der Lebenserwartungen nicht berücksichtigt.

c) *Eine Möglichkeit wäre, die Altersgruppen in die beiden Geschlechter zu trennen. Weiter könnten die Gruppen eine kleinere Altersstruktur erhalten, z.B. 5 Jahre pro Gruppe. So wäre auch das Erstellen eine Alterspyramide möglich.*
Berücksichtigen ließe sich auch der „Wanderungsgewinn“ als additive Größe, der in drei Varianten beim Statistischen Bundesamt Berücksichtigung findet. „Wanderungsgewinn“ ist die Anzahl der Zuwanderer vermindert um die Auswanderer. Die Datenlage erscheint für diesen Punkt nicht so günstig.
Diese Aufzählung erhebt nicht den Anspruch auf Vollständigkeit.



Prognose nach Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6

Die beiden folgenden Aufgaben geben verschiedene Ausblicke.
Aufgabe 7 verwendet ein logistisches Wachstumsmodell zur Vorhersage der Weltbevölkerung, es wird in der Aufgabe daher die Frage nach dem Langzeitverhalten der Iteration gestellt. Zugleich wird die Iteration auch graphisch durchgeführt.
In Aufgabe 8 wird auch ein logistisches Modell verwendet, allerdings in Abhängigkeit von einem Parameter. Je nach Wahl des Parameters verhält sich das Modell wie in Aufgabe 7 oder gleitet ins Chaos. Dieser Übergang ins Chaos soll auch mit einem Graphen dargestellt werden.

Aufgabe 7 (Ausblick)

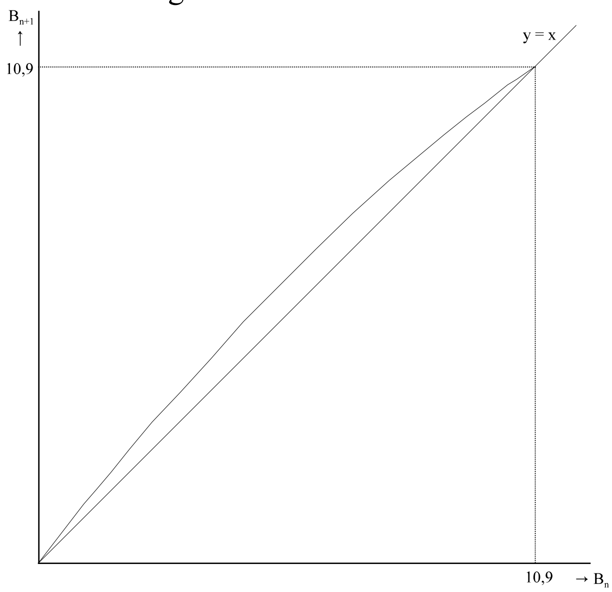
Die Entwicklung der Weltbevölkerung geschieht sehr unterschiedlich in Kontinenten und Regionen. Dennoch werden immer wieder Berechnungsmodelle veröffentlicht, die sich mit der Entwicklung der Gesamtzahl der Menschen auf der Erde beschäftigen. So lautet ein Modell

$$B_n = B_{n-1} + 0{,}3 \cdot B_{n-1} \cdot \left(1 - \frac{B_{n-1}}{10{,}9}\right) \quad \text{mit } B_0 = 6{,}1$$

B_0 ist die Weltbevölkerung im Jahr 2000 in Milliarden. Der Index n gibt die Jahrzehnte seit dem Jahr 2000 an: B_1 ist die Prognose der Weltbevölkerung im Jahr 2010, B_2 im Jahr 2020 usw.

a) Untersuchen Sie das Langzeitverhalten bei diesem Modell, also berechnen Sie mithilfe des Computers z.B. bis n = 20 oder andere geeignete Werte.
Dokumentieren Sie Ihre Untersuchung auch mit einem Diagramm.

b) Die Berechnung der Modellzahlen erfolgt iterativ. Dieser Vorgang kann auch graphisch dargestellt werden.
Tragen Sie dazu die ersten drei Berechnungsschritte B_0, B_1 und B_1, B_2 und B_2, B_3 in das Koordinatensystem ein.
Beschreiben (und skizzieren) Sie, wie die weiteren Schritte aussehen.
Worauf basiert die Kurve?



c) Berechnen Sie, welchen Wert das Modell für 1990 liefert.

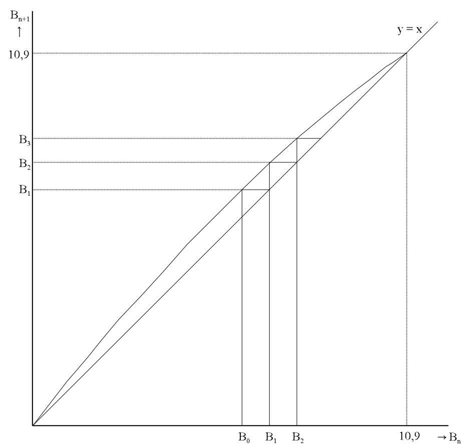
d) Erläutern Sie den Aufbau der Berechnungsformel. Welche Bedeutung hat in dieser Formel die Klammer?

Lösungshinweise:

a) Rechnet man mit einer Nachkommastelle, so scheinen sich die Werte bei 10,9 zu stabilisieren (ab n = 16).
In den Lösungsdateien sind noch weitere Schritte mit höherer Stellenzahl berechnet. Allerdings ist dies natürlich kein Konvergenzbeweis, der aber über Aufgabenteil d) erfolgen kann.

b) Siehe nebenstehende Abbildung.
Die grafische Iteration „hangelt“ sich nach rechts zwischen der Winkelhalbierenden und der Kurve auf den Schnittpunkt der beiden in (10,9|10,9) zu.
Die Kurve ist der Graph der Funktion f, die durch den Iterationsterm beschrieben wird:

$$f(x) = x + 0{,}3\,x \cdot \left(1 - \frac{x}{10{,}9}\right).$$



c) Lösen durch „rückwärts rechnen“ mit dem Ansatz f(x) = 6,1 führt auf eine quadratische Gleichung mit den beiden Lösungen 5,30 und 41,13. Im Sachkontext und im Modell ist nur die Lösung 5,30 möglich. Das entspricht auch ziemlich genau den Prognosen der Vereinten Nationen, nach der 1990 5,26 Milliarden Menschen auf der Erde lebten.

d) Beschreibung des Terms: neuer Bestand = alter Bestand + Wachsumsanteil und Wachsumsanteil = Faktor exponentielles Wachstum * „Relativier-Faktor“ (≤ 1)
Die Klammer (Relativier-Faktor) wird 0 für Bestand = 10,9. Dann kann es kein Wachstum in diesem Modell mehr geben.

Aufgabenquelle: Endexamen Wiskunde A1-2, vwo 2004-I · [*www.havovwo.nl*](www.havovwo.nl)
Informationen zur Weltbevölkerung: [*www.weltbevoelkerung.de/themenpark.html*](www.weltbevoelkerung.de/themenpark.html)

Aufgabe 8 (Ausblick)

An einem einfachen (und nicht ganz realistischen) Beispiel soll das Langzeitverhalten einer Iteration beobachtet werden, welches sich in Abhängigkeit von einem Faktor als extrem unterschiedlich erweist:

In einem Kinderheim sind die Masern ausgebrochen. Jeden Tag wird sich die Zahl der kranken Kinder erhöhen, weil kranke mit nicht kranken Kindern Kontakt haben und sich diese damit anstecken. Wie viel Prozent der Kinder erkrankt sind, kann mit folgendem Iterationsverfahren berechnet werden:

$$B_n = B_{n-1} + \text{Ansteckungsfaktor} \cdot B_{n-1} \cdot (1 - B_{n-1})$$

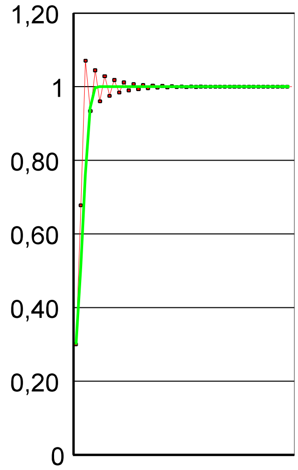
B_n ist dabei die Anzahl der erkrankten Kinder in Prozent, der Index n gibt die Tage an, die seit dem Start der Berechnung verstrichen sind.

a) Starten Sie mit $B_0 = 0{,}3$ (es seien bereits 30% der Kinder erkrankt) und berechnen Sie, wie sich der Anteil der erkrankten Kinder in den folgenden Tagen verhalten wird.
Wählen Sie dazu zwei verschiedene Ansteckungsfaktoren: einen aus dem Intervall [0;1,5] und einen aus]1,5 ; 3]. Experimentieren Sie auch mit beiden Faktoren.
Was stellen Sie fest?

b) Je nach Wahl des Ansteckungsfaktors kann der Verlauf der Werte der Iteration vorhersagbar sein oder chaotisch werden. Variieren Sie den Faktor von 0 bis 3 mit einer Schrittweite von 0,1 und führen Sie für jeden der 31 Faktoren 20 Iterationen durch. B_0 sei wieder = 0,3.
Sie können nur versuchen, die erhaltenen Zahlenwerte zu deuten.
Sie können aber auch ein Diagramm erstellen, welches das Chaos sichtbar macht. Tragen Sie zu jedem Iterationsschritt alle 31 Ergebnisse in das Diagramm ein. So ist auf der x-Achse der Faktor, auf der y-Achse die zugehörige Prozentzahl für einen Iterationsschritt aufgetragen.
Interpretieren Sie das Diagramm: Wo etwa beginnt das Chaos?

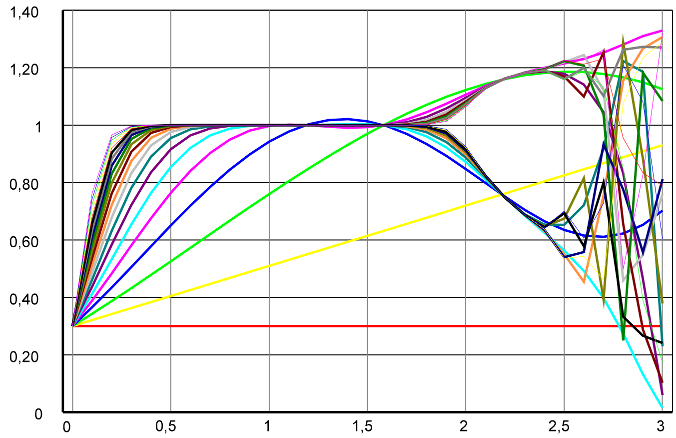
Lösungshinweise:

a)  Der Ansteckungsfaktor wird im Folgenden k genannt.
Bis etwa k = 1,0 verschiebt sich der Beginn einer starken Nähe zu 1 (zunächst nach „unten“, d.h. die dazu nötige Anzahl der Iterationen wächst, dann nach „oben“, sie fällt), ab etwa k = 1 entstehen erstmals Werte leicht größer als 1, was ja nach dem Sachkontext eigentlich nicht möglich ist. Die Abbildung zeigt den Verlauf der Iteration für k = 1,0 und k = 1,8, wo sich bereits ein längerer Prozess des „Einschwingens“ auf die 1 zeigt. Bei k = 2,1 kann bereits vermutet werden, dass sich die Iteration auf zwei Punkte einschwingt, bei 2,5 auf 4. Bei k = 2,6 kann dieser Sachverhalt mit der Grafik nicht mehr genau abgezählt werden.
Ab k = 3 beginnen schnell betragsmäßig sehr große Werte aufzutauchen.



b) *Ab k > 2,5 erscheint die Anzahl der Häufungswerte nicht mehr überblickt werden zu können, die Bandbreite der Werte nimmt zu.*

Wie bei Aufgabe 7d) kann auch bei dieser Aufgabe nach dem Aufbau der Berechnungsformel gefragt werden.



Quelle der Aufgabe: *KARL-HEINZ BECKER, MICHAEL DÖRFLER*
Dynamische Systeme und Fraktale · Vieweg, Braunschweig 1988

Abschließende Aufgabe

Blicken Sie auf den Themenbereich „Iteration“ zurück und verschaffen Sie sich einen Überblick:

- Beschreiben Sie die nach ihrer Meinung charakteristischen mathematischen Inhalte und, soweit dies möglich ist, bei welchem Sachkontext einer Aufgabenstellung diese sinnvoll angewendet werden können.
- Sehen Sie Verbindungen zu früheren Themen der Mathematik, zu anderen Fächern oder zu Sachverhalten außerhalb der Schule? Wenn ja, geben Sie diese an (auch unter Verwendung graphischer Mittel) und begründen Sie Ihre Angaben.

Hinweise

Internet-Adressen

- Daten zu Hamburg und Schleswig-Holstein
  Statistikamt Nord: www.statistik-nord.de
- Daten zu Deutschland
  Statistisches Bundesamt Deutschland: www.destatis.de/d_home.htm
- Daten aus Europa (EU)
  Eurostat: www.europa.eu.int/comm/eurostat/
- Internationale Daten, auch für Deutschland
  U.S. Census Bureau: www.census.gov/ipc/www/idbpyr.html
- zur Entwicklung der Weltbevölkerung
  Deutsche Stiftung Weltbevölkerung: www.weltbevoelkerung.de/themenpark.html

Material-Dateien

Beschreibung	Ordner	Name der Datei
Artikel aus dem Hamburger Abendblatt (zu Aufgabe 4)	V3-Material	V3-Zeitung.pdf
Animierte Bevölkerungspyramide 2002 bis 2050 *© Daten: Animierte Bevölkerungspyramide zur 10. koordinierten Bevölkerungsvorausberechnung · Statistisches Bundesamt, Wiesbaden 2003* *www.destatis.de/basis/d/bevoe/bev_svg2.htm* ***Anmerkungen zur animierten Bevölkerungspyramide*** *Für den Zeitraum von 2002 bis 2050 wurden die Ergebnisse der mittleren Variante der 10. koordinierten Bevölkerungsvorausberechnung herangezogen. Dieser Variante liegen folgende Annahmen zugrunde:* *1) Die Geburtenhäufigkeit bleibt während des gesamten Zeitraums der Vorausberechnung bei 1,4 Kinder pro Frau;* *2) Die Lebenserwartung bei Geburt steigt bis 2050 für Mädchen auf 86,6 Jahre und für Jungen auf 81,1 Jahre; die „fernere" Lebenserwartung beträgt 2050 für 60-Jährige Frauen 28 weitere Lebensjahre und für gleichaltrige Männer etwa 24 Lebensjahre;* *3) Der Außenwanderungssaldo der ausländischen Bevölkerung beträgt 200.000 jährlich; die Nettozuwanderung der Deutschen geht von etwa 80.000 im Jahr 2002 schrittweise zurück bis zum Nullniveau im Jahr 2040.*	V3-Material	V3-Bev_Pyramide.zip
Bevölkerungsdaten zu 2002 (Quellenangaben in der Datei)	Excel / Quattro Pro	V3-Bev_2002
Sterbetafel 2001 / 2003 (ohne Bearbeitung)	Excel / Quattro Pro	V3-Sterbetafel
Sterbetafel 2001 / 2003 (mit Bearbeitung)	Excel / Quattro Pro	V3-Sterbetafel_b
Daten von 1950 bis 2003 zu Geburten und Sterbefällen (Statistisches Bundesamt · Grundlage für Ersatzaufgabe 2)	Excel / Quattro Pro	V3-Ehe_Geburt_Sterbe_04

Autor: Winfried Euba
Lizenzgeber für die verwendeten Cliparts: Corel® (WordPerfect® Office)

Zeitvorschlag: 15 Stunden (von 90)

V1	V3	V2, V4 oder V5	V6