V4 · Lineare Optimierung

Übersicht

Inhalte

Mit einer klassischen, eindeutig lösbaren Aufgabe zur linearen Optimierung wird zunächst in die Problematik eingeführt und dabei das Aufstellen von Ungleichungen und Gleichungen mit 2 Variablen und deren Darstellung im Koordinatensystem wiederholt bzw. entwickelt.
Um zu klären, wo ein gesuchtes Maximum (oder Minimum) überhaupt liegen könnte, wird die Aufgabe variiert, auch so, dass die Lösung nicht mehr eindeutig ist und keine Lösung existiert.
Die Form der Schnittmenge von Halbebenen bei solchen Aufgaben wird ebenfalls untersucht: Es ist stets eine konvexe Menge.
Ein Ausblick auf Aufgaben mit mehr als 2 Variablen und auf die nichtlineare Optimierung stehen am Ende der Unterrichtsreihe, die mit einem Rückblick abgeschlossen wird.

Methodische Hinweise

Vorgeschlagene Unterrichtsform: Gruppenarbeit für das paradigmatische Beispiel.

Die Schülerinnen und Schüler sollten mit ihren Kenntnissen aus der Mittelstufe und den vorangegangenen Themenbereichen Ungleichungen und Gleichungen aus dem Kontext der Aufgabe aufstellen und auch eine Skizze des Zulässigkeitsbereiches erstellen können, in die ein Vertreter der Zielfunktion eingezeichnet wird. Möglicherweise probieren die Lernenden aber auch mit verschiedenen Wertepaaren aus, wo der optimale Wert liegt.
Hier taucht vielleicht bereits die Frage nach der prinzipiellen Form des Zulässigkeitsbereiches auf (konvexe Menge) und wo optimale Punkte liegen können.
Variationen der Aufgabenstellung – auch mit nicht eindeutiger Lösung – sollen zur Klärung beitragen. Finden die Lernenden nicht selbstständig die Form des Zulässigkeitsbereiches, so hilft z.B. die Frage, ob eine Menge wie in nebenstehender Abbildung (nicht konvexe Menge) als Skizze eines Systems linearer Ungleichungen mit 2 Variablen auftreten könnte.

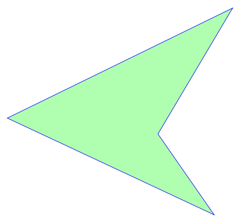


Abbildung 1
nicht konvexe Menge

Weiter sollte auch diskutiert werden, wann eine Aufgabe unlösbar ist.
Ob man den Hauptsatz der linearen Optimierung anspricht, der ja die Grundlage für das Simplex-Verfahren ist, hängt von der zur Verfügung stehenden Zeit ab. Möglicherweise ergibt sich dieser Satz (im $\mathbb{R}^2$) auch bei der Arbeit in einer der Gruppen.

Eine n-stellige reelle lineare Funktion, die auf einem durch reelle lineare Ungleichungen mit n Variablen beschriebenen konvexen Bereich (Zulässigkeitsbereich) definiert ist, nimmt ihr Maximum bzw. ihr Minimum – sofern ein solches existiert – stets am Rand dieses Bereiches an.

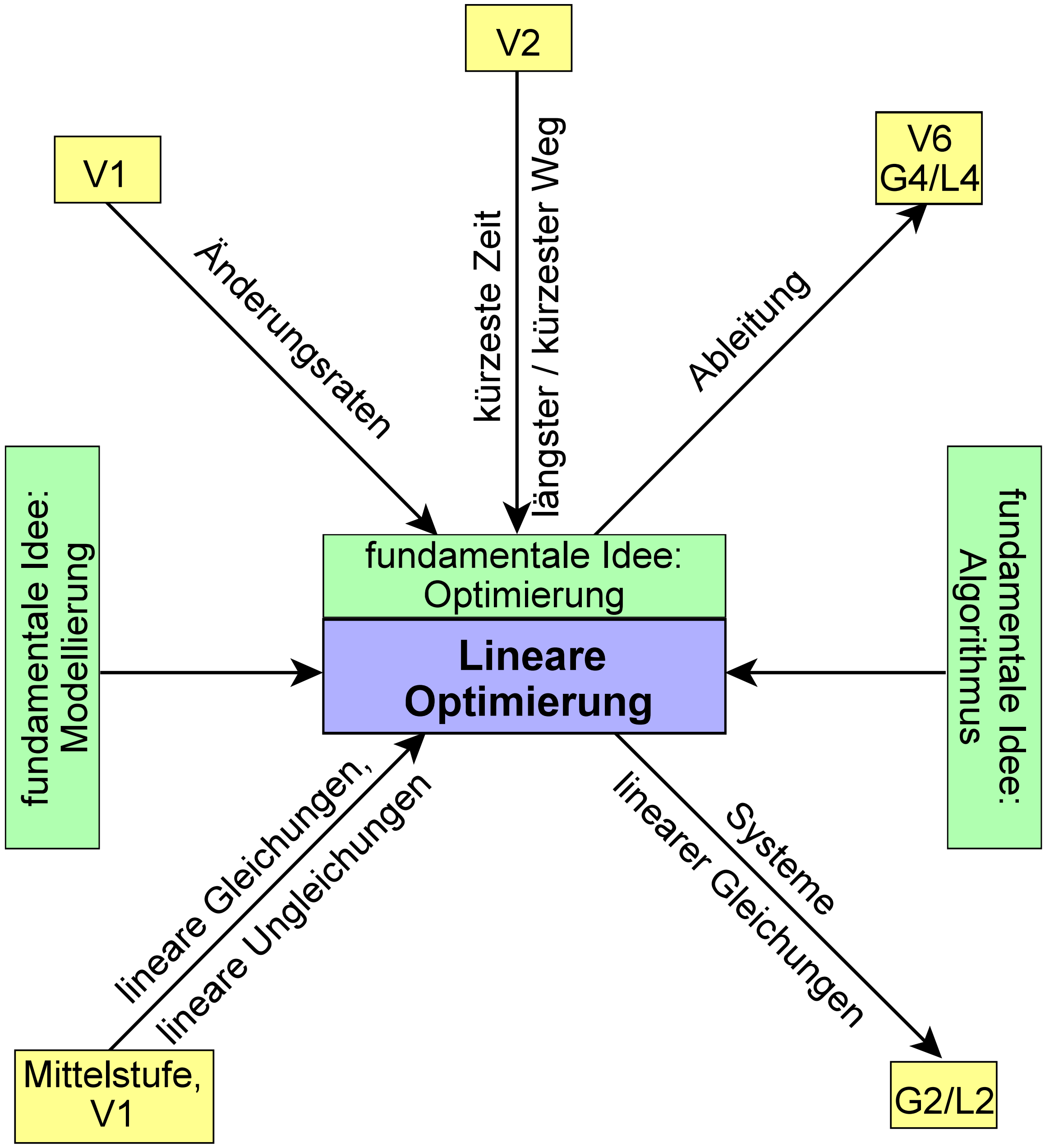
Hauptsatz der linearen Optimierung, Formulierung nach [1]

Ist das paradigmatische Beispiel eine Maximumaufgabe, sollte bei den Übungsaufgaben auch nach einem Minimum gesucht werden und umgekehrt. Vielleicht entdeckt dabei eine Schülerin oder ein Schüler, dass die beiden Aufgabentypen ineinander übergeführt werden können.

Das Lösen einer Aufgabe mit einer Tabellenkalkulation, das Aufstellen eines Systems von Ungleichungen und der Zielfunktion bei mehr als 2 Variablen und eine ohne Differentialrechnung lösbare Aufgabe mit nichtlinearer Optimierung geben zum Ende der Unterrichtsreihe verschiedene Ausblicke: In Tabellenkalkulationen gibt es Tools zur Lösung verschiedener Aufgaben · Realitätsbezug führt oft zu Aufgaben mit mehr als 2 Variablen · die zentrale Idee der Optimierung taucht in verschiedenen Methoden auf.

Vernetzungen

Jeder Lernende (und auch jeder Lehrende) muss und wird sich eigene Vernetzungen schaffen und konkret ausformen. Im Unterricht sollten aber dazu Angebote kommen: Die folgende Grafik gibt einen Überblick, in welchen Bereichen Vernetzungen im Prinzip wünschenswert sind.
Siehe hierzu auch Seite 14, „Abschließende Aufgabe".



Vorschläge für den Unterricht

Paradigmatisches Beispiel:

a) Eine Gärtnerei kann von einem Nachbargrundstück bis zu 5 ha Land erwerben. Das Land soll teilweise als Freiland, aber auch mit Folie überdacht bewirtschaftet werden. Für dessen Bewirtschaftung stehen insgesamt nicht mehr als 420 Arbeitstage pro Jahr zur Verfügung; 1 ha Freiland erfordert 40 Arbeitstage im Jahr, 1 ha überdachtes Land dagegen 240 Arbeitstage jährlich.
An Kosten entstehen für 1 ha Freiland pro Jahr 800 €, für 1 ha überdachtes (unbeheiztes) Land fallen pro Jahr 2.400 € an – ohne Berücksichtigung der Baukosten für die Überdachung. Die Gärtnerei möchte die Kosten auf insgesamt 4.800 € im Jahr beschränken.
Der voraussichtliche jährliche Reingewinn pro ha Freiland beträgt 1.000 €, für das überdachte Land 2.000 €.

Wie viel Hektar sollte die Gärtnerei kaufen, und wie viel Hektar davon wird sie mit Folie überdecken, wenn der jährliche Gewinn unter den genannten Bedingungen möglichst groß sein soll?

b) Die Gärtnerei möchte jetzt die Kosten auf 6.000 € pro Jahr beschränken, ist also bereit, zunächst maximal 1.200 € mehr zu investieren.
Die anderen Nebenbedingungen obiger Aufgabe bleiben gleich.
Wie ist jetzt maximaler Gewinn zu erzielen?
Was ändert sich gegenüber der ersten Fassung der Aufgabe?

c1) Beschreiben Sie, wie bei einer Aufgabe zur linearen Optimierung eine Lösung entstehen könnte, die nicht mehr eindeutig ist.

c2) Beschreiben Sie, wie der Fall eintreten könnte, dass eine Aufgabe zur linearen Optimierung nicht lösbar ist.

Ändern Sie die Teilaufgabe a) jeweils entsprechend ab und interpretieren Sie Ihre Änderung nach Möglichkeit im Kontext der Aufgabe.

Lösungsvorschläge zu a):

Wir vereinbaren

x = Anzahl (in ha) gekaufter Fläche für die Nutzung mit Folie,

y = Anzahl (in ha) gekaufter Fläche für die Nutzung als Freiland.

Aus dem Sachkontext der Aufgabenstellung folgt $x \geq 0$ und $y \geq 0$.

Die 3 Bedingungen ergeben die Ungleichungen

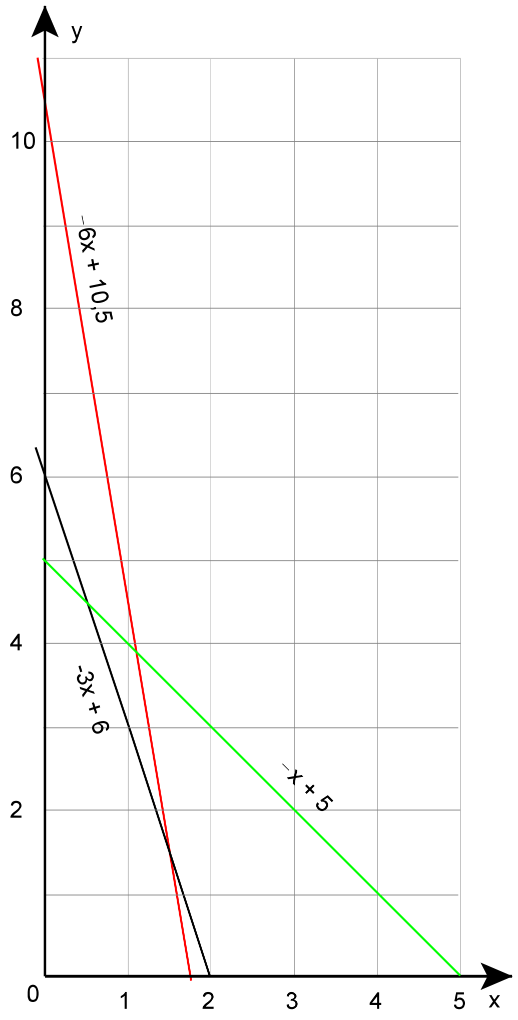
$$\begin{array}{lrcrcr} \text{III} & y & + & x & \le & 5 \\ \text{IV} & 40y & + & 240x & \le & 420 \\ \text{V} & 800y & + & 2.400x & \le & 4.800 \end{array} \text{. Gekürzt ergibt sich } \begin{array}{lrcrcr} \text{III} & y & + & x & \le & 5 \\ \text{IV} & y & + & 6x & \le & 10{,}5 \\ \text{V} & y & + & 3x & \le & 6 \end{array}$$

und aufgelöst nach y folgt insgesamt das System

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{I} & x & \ge & 0 & & \\ \text{II} & y & \ge & 0 & & \\ \text{III} & y & \le & -x & + & 5 \\ \text{IV} & y & \le & -6x & + & 10{,}5 \\ \text{V} & y & \le & -3x & + & 6 \end{array} .$$

Die ersten beiden Ungleichungen nennt man auch *Nichtnegativitätsbedingungen*, die restlichen Ungleichungen *Nebenbedingungen* oder *einschränkende Bedingungen*.

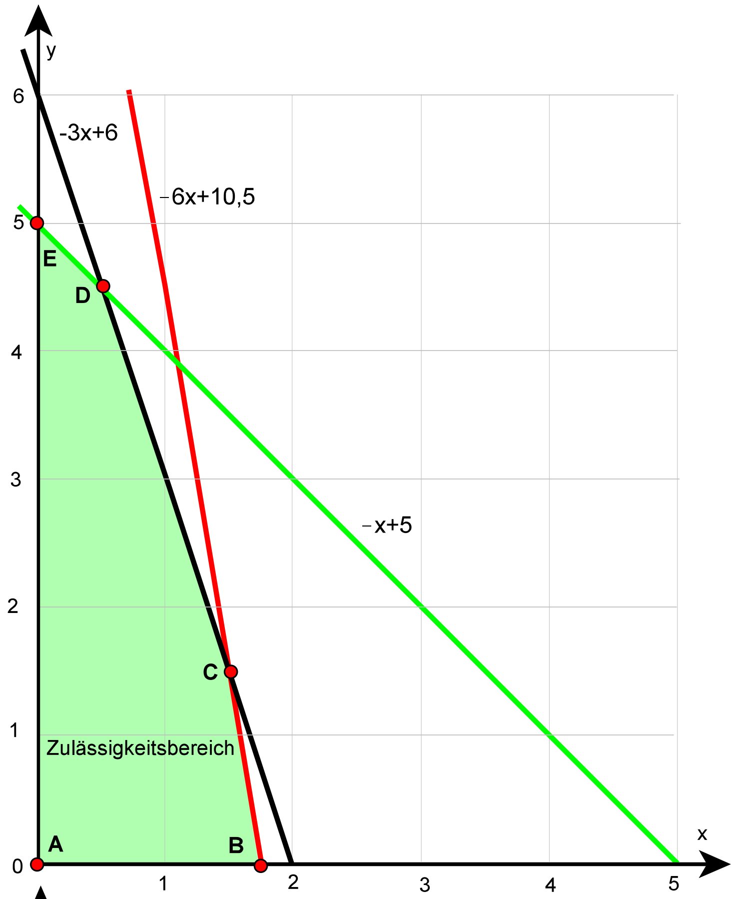
Die *Zielfunktion* ist 2.000 x + 1.000 y → max oder y = −2x + c, wobei der y-Achsenabschnitt möglichst groß sein soll und den Wert $\frac{\max}{1.000}$ anzeigt, sofern ein Maximum existiert.



Die 3 Ungleichungen III, IV und V werden (als Gleichungen gedacht) in ein Koordinatensystem gezeichnet (siehe nebenstehende Abbildung 3).

Abbildung 3

Abbildung 4



Anschließend wird die zu der jeweiligen Ungleichung gehörende Halbebene markiert und so die Schnittmenge der Halbebenen gefunden, die man *Zulässigkeitsbereich* oder auch *Menge der zulässigen Punkte* nennet (siehe nebenstehende Abb. 4).

Schließlich wird eine Gerade mit der Steigung −2 als Vertreterin der gesuchten Zielgeraden eingezeichnet und so lange parallel verschoben, bis ihr y-Achsenabschnitt maximal ist, sie aber noch mindestens einen gemeinsamen Punkt mit der Menge der zulässigen Punkte hat: Man sieht, dass die optimale Zielgerade die y-Achse bei 5,5 schneidet. Daraus folgt: max = 5,5 · 1000 = 5.500.
Die optimalen Bedingungen im Sinne der Aufgabenstellung sind offenbar im Punkt D(0,5|4,5) gegeben.

Die Ergebnisse müssen jetzt im Sinne der Aufgabenstellung interpretiert werden:

Die Koordinaten von D bedeuten, dass für maximalen Gewinn 4,5 ha Land als Freifläche und 0,5 ha mit Überdachung genutzt werden sollte.
Da 4,5 + 0,5 = 5 ist, muss die Gärtnerei offenbar die angebotene Fläche vollständig aufkaufen.

Der maximale Gewinn wurde oben schon angegeben; er beträgt 5.500 € pro Jahr.

Das Ausprobieren von Wertepaaren, die maximalen Gewinn versprechen, ist bei dieser Aufgabe nicht so einfach, da $x, y \in \mathbb{R}^+_0$ *möglich ist.*

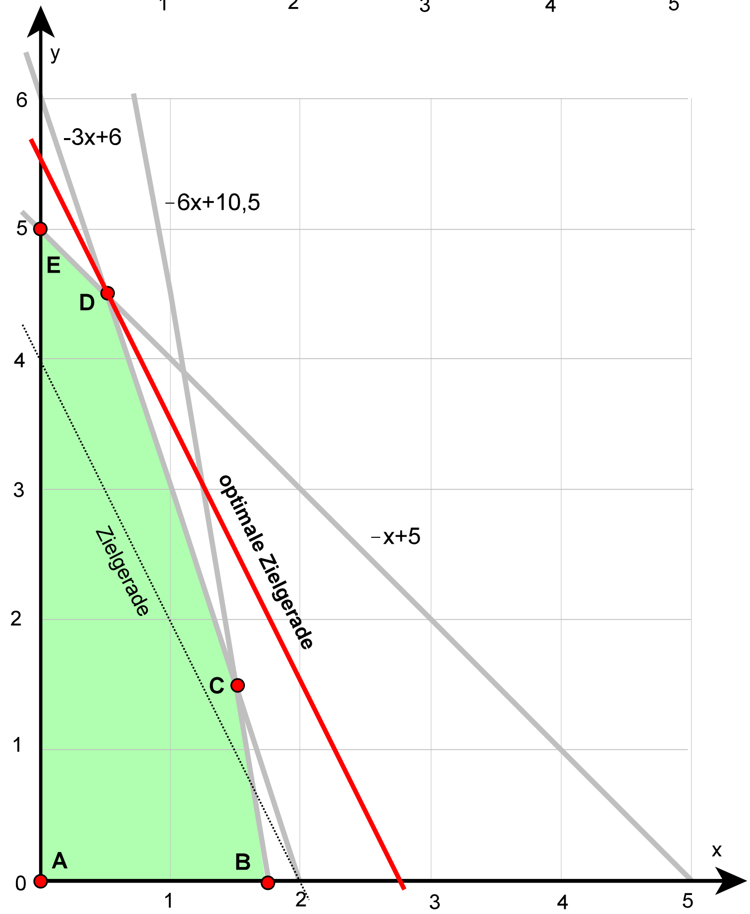


Abbildung 5

Lösungsvorschläge zu b):

Es ändert sich nur Ungleichung V:

$$\begin{array}{lllrcr} \text{I} & x & \geq & 0 & & \\ \text{II} & y & \geq & 0 & & \\ \text{III} & y & \leq & -x & + & 5 \\ \text{IV} & y & \leq & -6x & + & 10{,}5 \\ \text{V} & y & \leq & -3x & + & 7{,}5 \end{array} .$$

Die zu Ungleichung V gehörende Gerade verschiebt sich also parallel in positive x und y-Richtung.

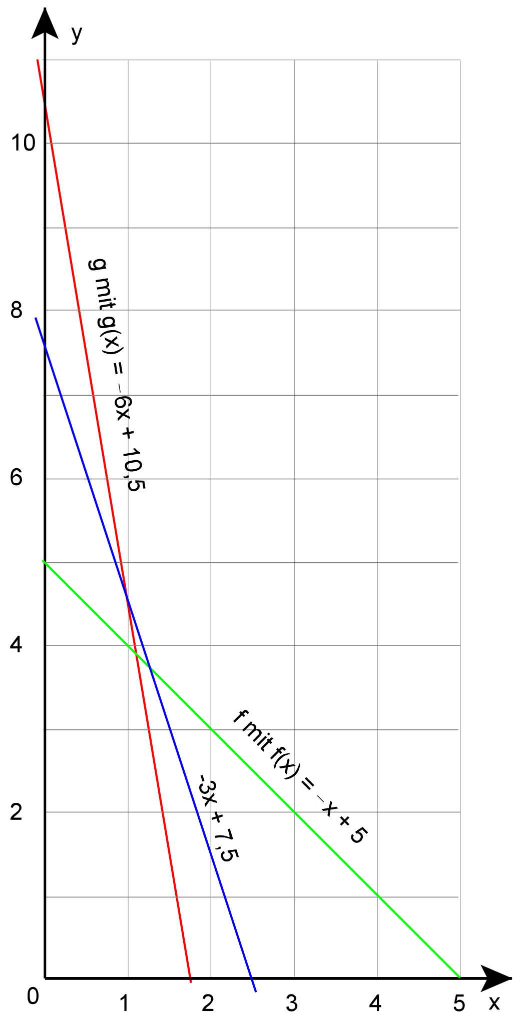


Abbildung 6

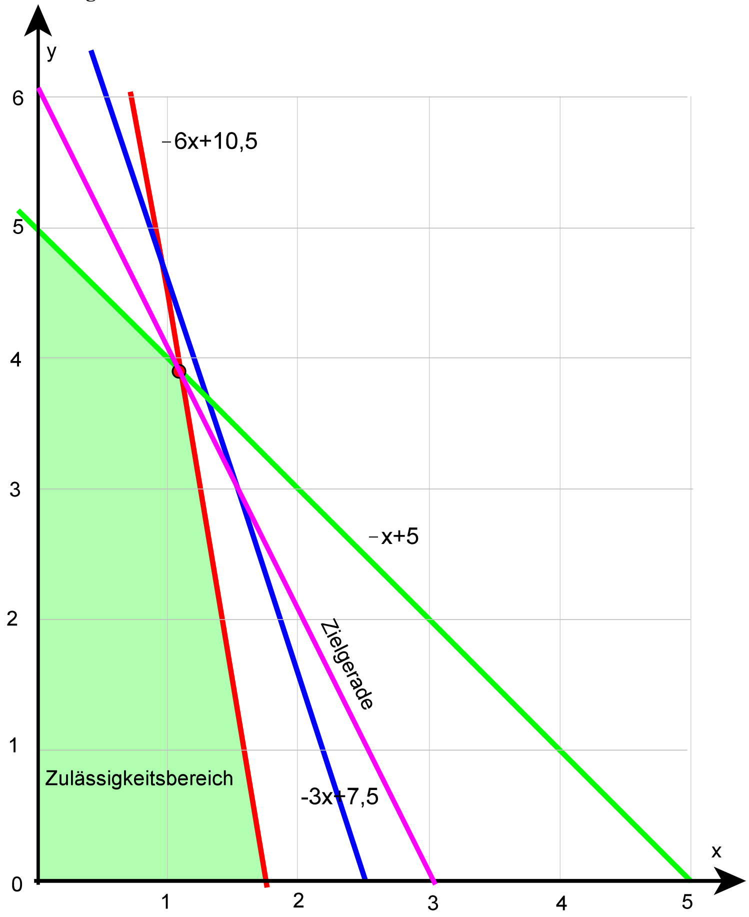
Es ist zu erkennen, dass die verschobene Gerade (Term: $-3x + 7{,}5$) keine Rolle mehr für den Zulässigkeitsbereich spielt.

Es ist der Schnittpunkt von f und g mit $f(x) = -x+5$ und $g(x) = -6x+10{,}5$ zu berechnen, der in der Zeichnung nicht mehr genau ablesbar ist:
$S(1{,}1|3{,}9)$.

Durch diesen Eckpunkt muss offenbar auch die Zielgerade gehen, deren y-Achsenabschnitt man mit den Koordinaten von S berechnen kann.
$z(x) = -2x + 6{,}1$.

Die Interpretation der Ergebnisse im Kontext der Aufgabe erfolgt analog wie oben bei a).

Abbildung 7



Was hat sich nun gegenüber Teilaufgabe a) geändert?

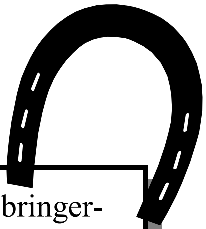
- Der Zulässigkeitsbereich hat sich geändert (als Auswirkung der geänderten Nebenbedingung).
- Die Koordinaten des neuen optimalen Eckpunkts sind nicht mehr ablesbar, der Wert muss berechnet werden und daher auch der y-Achsenabschnitt der Zielgerade.

Lösungsvorschläge zu c):

c1) Die optimale Zielgerade ist parallel zu einer Begrenzungslinie des Zulässigkeitsbereiches (durch einen optimalen Eckpunkt). Dazu kann entweder die Steigung der Zielgerade oder einer Begrenzungslinie geändert werden.
Steigt etwa der Reingewinn für das überdachte Land pro ha auf 3.000 €, lautet die Zielgerade $z(x) = -3x + c$, die damit parallel zur Begrenzungsgeraden $y = -3x + 6$ ist. Alle Punkte auf dieser Geraden mit $0{,}5 \leq x \leq 1{,}5$ ergeben optimale Lösungen:
Die Gärtnerei kauft nur 3 ha Land und bewirtschaftet 1,5 ha als Freiland und 1,5 ha als überdachte Fläche. Der maximale Gewinn beträgt so 6.000 €. *Oder*
Die Gärtnerei kauft 4 ha Land und bewirtschaftet 3 ha als Freiland und 1 ha als überdachte Fläche. Der maximale Gewinn beträgt so 6.000 €. *Oder...*

c2) Dazu müssen sich etwa Nebenbedingungen gegenseitig ausschließen. Wird in der ursprünglichen Aufgabe III abgeändert zu III': $y \geq -x + 6{,}5$, müsste die Gärtnerei also *mindestens* 6,5 ha Land erwerben, so wäre der Zulässigkeitsbereich leer, die Aufgabe unlösbar.

Die Aufgabe ist ohne Computereinsatz lösbar.



Aufgabe 2

Katrin besitzt einen kleinen Schmiedeofen, den sie immer wieder benutzt, um „Glücksbringer-Hufeisen“ herzustellen. Sie fertigt diese Hufeisen in zwei Größen, nämlich für Zugpferde und Ponys. Ein Hufeisen in der Größe für Zugpferde ist in 20 Minuten hergestellt, ein Hufeisen in der Größe für Ponys in 15 Minuten. Katrin arbeitet mit ihrem Schmiedeofen mindestens 6 Stunden in der Woche, aber nie mehr als 20 Stunden.
Sie verdient an einem Pony-Hufeisen 4 €, an einem Zugpferd-Hufeisen 6 €. In einer Woche hat sie bisher nie mehr als 40 große und 50 kleine Hufeisen verkauft.

a) Wie viele Hufeisen von jeder Sorte sollte sie herstellen, um pro Woche maximalen Profit zu machen?
Wie lang muss sie dann in der Woche arbeiten?

b) Wie viel Zeit muss sie mindestens in einer Woche arbeiten, um 250 € Gewinn zu machen?
Wie viele Hufeisen von jeder Sorte produziert sie dann?

Diese Aufgabe ist zwar noch eine Maximumaufgabe, sie führt aber durch eine Variation der Fragestellung zur Minimumaufgabe hin. Ein neues kleines Problem ist die vom Kontext geforderte Ganzzahligkeit, sodass die gesuchte Lösung von a) nicht wirklich auf dem gefundenen Eckpunkt liegt.
Die Lösung von b) kann z.B. auch über Ausprobieren gefunden werden, wie in der beiliegenden DERIVE-Datei.

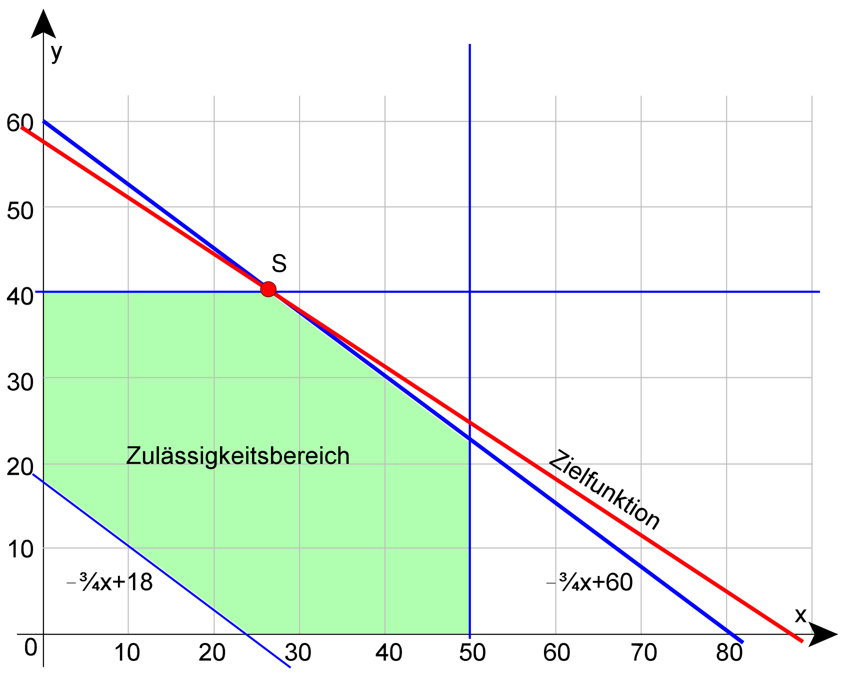


Abbildung 9

Lösungsvorschläge:

a) x = Anzahl kleine Hufeisen,
y = Anzahl große Hufeisen.
Dann ist zunächst

I $x \geq 0$

II $y \geq 0$

III $x \leq 50$

IV $y \leq 40$

Die Arbeitszeit mit dem Schmiedeofen ist noch nicht berücksichtigt:
$6 \leq \frac{1}{3} \cdot y + \frac{1}{4} \cdot x \leq 20$. Das sind 2 Ungleichungen, die nach y aufgelöst so aussehen

V $y \leq -\frac{3}{4} \cdot x + 60$

VI $y \geq -\frac{3}{4} \cdot x + 18$.

So ergibt sich nebenstehender Zulässigkeitsbereich.

Der eingezeichnete Schnittpunkt S ist S($\frac{80}{3}$|40), der optimale Punkt für die Zielfunktion

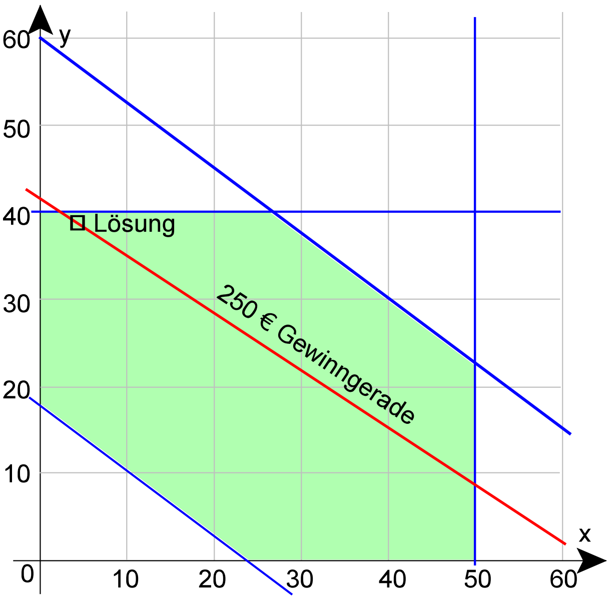
$4 \cdot x + 6 \cdot y \to \max$ bzw. $y(x) = -\frac{2}{3}x + c$ und $c = \frac{\max}{6}$.

Der „nächste" ganzzahlige Wert ist $x_m = 26$ und $y_m = 40$, aber nicht der optimale. Das ist das Wertepaar $x_{max} = 28$, $y_{max} = 39$, das einen Gewinn von 346 € und eine Arbeitszeit von 20 h bedeutet. Es muss also ein wenig nach einem ganzahligen optimalen Punkt gesucht werden.

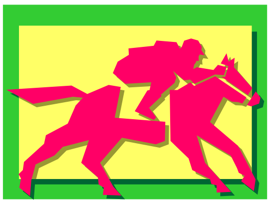
Mit der Produktion von 28 kleinen und 39 großen Hufeisen macht Katrin einen maximalen Gewinn von 346 €. Dafür muss sie aber genau 20 Stunden arbeiten.
(Lösung ohne Computereinsatz möglich.)

b) Die Gerade mit 250 € Gewinn hat die Gleichung $z(x) = -\frac{2}{3} \cdot x + \frac{125}{3}$. Diese Gerade liegt „mitten" im Zulässigkeitsbereich *(siehe Abbildung)*.

Mit den ganzzahligen Paaren auf z kann man jedoch die jeweils zugehörige Zeit ausrechnen und erhält: Katrin muss mindestens 14 Stunden für einen Gewinn von 250 € arbeiten. Sie produziert dann 4 kleine und 39 große Hufeisen.
(Berechnung mit Taschenrechner recht unübersichtlich, siehe Derive-Datei V4-2.dfw)



Aufgabe 3



Ein Lieferant für Rennställe benötigt pro Woche mindestens 500 Ballen Heu und 400 Ballen Stroh. Er bezieht Heu und Stroh von zwei Betrieben, die als Kaufanreiz Kombiangebote machen: Die landwirtschaftliche Genossenschaft Westenberg gibt beim Kauf von jeweils 6 Ballen Heu 4 Ballen Stroh gratis, die Genossenschaft Ostenberg gibt 2 Ballen Heu gratis beim Kauf von jeweils 8 Ballen Stroh.

Erfinden Sie eine geeignete Fragestellung und lösen Sie dann die Aufgabe.

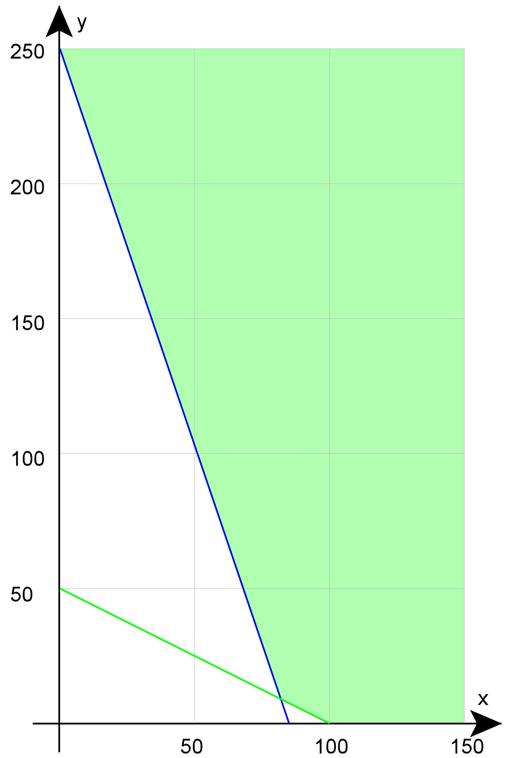
Lösungsvorschläge:

Sei x = Anzahl à 10 Ballen von Westenberg (bestehend aus 6 · Heu und 4 · Stroh) und
y = Anzahl à 10 Ballen von Ostenberg (bestehend aus 2 · Heu und 8 · Stroh).

Dann ist zunächst $x, y \geq 0$ und $6 \cdot x + 2 \cdot y \geq 500$ sowie $4 \cdot x + 8 \cdot y \geq 400$.

$$\Rightarrow \begin{array}{lcl} x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \\ y & \geq & -3x + 250 \\ y & \geq & -0{,}5x + 50 \end{array}$$

Rechts abgebildet ist der Zulässigkeitsbereich.



Der Schnittpunkt zwischen den beiden Geraden ist S(80|10). Ob dieser Punkt optimal ist, hängt von der Steigung der Zielfunktion ab.

Die Schülerinnen und Schüler sollten erkennen, dass hier eine Minimumaufgabe vorliegt und entsprechende Fragestellungen entwickeln. Aber vielleicht ergeben sich ja auch andere interessante Aufgabenstellungen.

Aufgabe 4

Sie haben jetzt an einigen Aufgaben die Problemstellung mithilfe eines Systems linearer Ungleichungssysteme und einer linearen Funktion (Zielfunktion) zu beschreiben.

a) Aus dem Ungleichungssystem haben Sie den Zulässigkeitsbereich skizziert. Beschreiben Sie, welche Form dieser Bereich haben muss bzw. welche er nicht haben kann.

b) Geben Sie eine Lösungsstrategie an und begründen Sie, warum Sie so vorgehen.

c) Welche Fälle können bei einem Lösungsversuch auftreten und woran ist ein Fall jeweils zu erkennen?

Lösungsvorschläge:

a) *Hier sollte eine konvexe Menge beschrieben werden, der Fachausdruck muss nicht eingeführt werden. Möglich ist auch, dass beschrieben wird, wie die Menge nicht aussehen darf (siehe dazu Abbildung1, S.1).* Dabei heißt eine Punktmenge konvex, wenn sie mit zwei beliebigen Punkten P_1 und P_2 auch alle Punkte der Verbindungsstrecke $\overline{P_1 P_2}$ enthält.

b) *Jetzt sollte das suchen von Ecken erwähnt werden.*

c) *Maximum- und Minimumprobleme können unterschieden werden, zwingend sind jedoch die Unterscheidung in eindeutig und mehrdeutig lösbar sowie unlösbar mit den zugehörigen charakteristischen Eigenschaften: Im Falle der Lösbarkeit geht es um die Steigung der Zielgeraden, im Falle der Unlösbarkeit schließen sich etwa Nebenbedingungen gegenseitig aus, sodass der Zulässigkeitsbereich leer ist.*

Die Beschreibung kann auch anhand von Beispielen erfolgen, sie sollte jedoch für weitere Anwendungen verallgemeinert werden.

Die Mikroökonomie nutzt die Idee von Nebenbedingungen und Graphen um zu klären, wie sich Änderungen von Parametern (z.B. Preise, Steuern, Einnahmen, etc.) auf ein Unternehmen auswirken.
In der folgenden Aufgabe wird mit dieser Methode versucht, den Gewinn auf eine bestimmte Höhe zu bekommen. Der Einsatz des Computers erleichtert dabei den Umgang mit den relativ vielen Daten, er ist aber für Teil b) keineswegs zwingend, wie c) zeigen soll. Bei realen Problemen ist jedoch der Computereinsatz zumeist notwendig.

Aufgabe 5

Ein Betrieb produziert Socken. Die monatliche Menge kann der folgenden Tabelle entnommen werden. Der Unternehmer rechnet mit Herstellungskosten von 3 € pro Stück und einem Verkaufspreis von 5 € pro Stück.

a) Berechnen Sie mithilfe eines Kalkulationsprogramms zunächst jeweils den Gewinn in den ersten drei Monaten und dann den Gesamtgewinn im ersten Quartal (die Daten finden Sie in der nebenstehenden Abbildung bzw. gegebenenfalls in einer Datei).

Verkaufsplanung:

VK-Preis pro Stück:		5,00 €		
Herstellunsgkosten pro Stück:		3,00 €		
Vertriebskosten pro Stück:			(25% der Herstellunsgkosten)	

	Januar	Februar	März	1. Quartal
Stückzahl:	10.000	20.000	30.000	
Herstellunsgkosten:				
Vertriebskosten:				
Feste Kosten:	13.000,00 €	14.000,00 €	15.000,00 €	
Gesamtkosten:				
Umsatzerlöse:				
Summe:				

b) Untersuchen Sie mithilfe eines Lösungstools (z.B. in Excel ist ein Add-In namens „Solver“, das eventuell noch installiert werden muss), wie sich die Herstellungskosten und der Verkaufspreis optimal verändern müssen, damit der Gesamtgewinn der Unternehmung im ersten Quartal auf 70.000 € vergrößert werden kann, wobei die Gesamtherstellungskosten im ersten Quartal 150.000 € und die Gesamtkosten 230.000 € nicht überschreiten sollen.

c) Formulieren Sie b) als normale Optimierungsaufgabe und versuchen Sie eine Lösung. Stimmt Ihre Lösung mit der Lösung des Programms überein?

Lösungsvorschläge:

a) Normale Arbeit mit einer Tabellenkalkulation.

b) Verwendet man Excel, so sollte im „Solver“ unter „Optionen“ der Punkt „Lineares Modell voraussetzen“ gewählt werden (siehe Abbildung 12, nächste Seite).
Excel gibt als Lösung aus: Verkaufspreis 4,99 €, Herstellungskosten 2,50 €. Quattro Pro rechnet dagegen mit Herstellungskosten = 0, wenn dafür keine untere Schranke gegeben ist. Die Lösungsstrategie der Programme ist leider nicht sichtbar, aber Quattro Pro beginnt offenbar bei der unteren Grenze für die Herstellungskosten, denn die „Lösung“ erscheint nach nur einem Iterationsschritt. Excel scheint von der oberen Grenze der Herstellungskosten auszugehen, die bei 2,50 € liegt (60.000 · 2,50 € = 150.000 €).

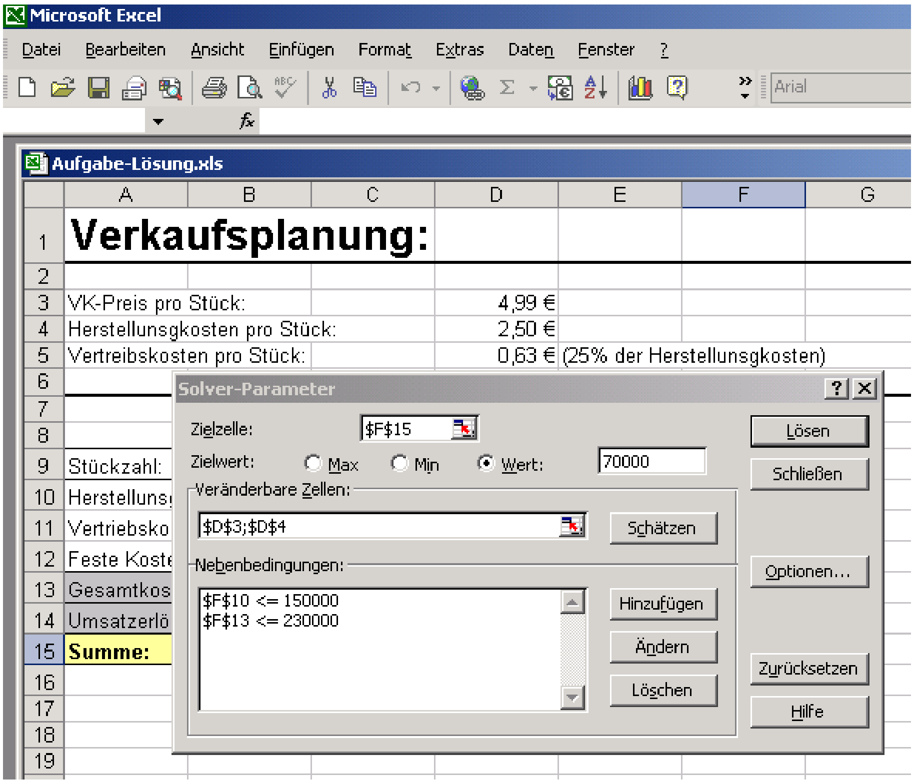


Abbildung 12

Tippt man 4,99 € und 2,50 € in die Tabelle von 5a) ein, ist der Gewinn nur 69.900 €. Das liegt natürlich daran, dass die Tabellenkalkulation die Ergebnisse auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet hat. „Exakte Lösungen" erhält man mit diesem Verfahren im Allgemeinen nicht. Doch interessieren solche überhaupt in der Praxis?

Es liegen die beiden Dateien „V4-05bS" für Excel und Quattro Pro vor, in denen verschiede Einstellungen für das Lösungsverfahren gewählt wurden.

c) Gesamtgewinn = 70.000
x = Herstellungskosten, y = Verkaufspreis und $x, y \geq 0$

I Kosten: $75.000\,x + 42.000 \leq 230.000 \Rightarrow x \leq \frac{188}{75} \approx 2{,}5067$

II Herstellungskosten: $60.000\,x \leq 150.000 \Rightarrow x \leq 2{,}5$ *stärker*

Gewinn: $-75.000\,x - 42.000 + 60.000\,y = 70.000 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{75}{60}x + \frac{112}{60}$

Alle zulässigen Paare (also $x \leq 2{,}5$), die diese Gleichung erfüllen, ergeben einen Gewinn von 70.000, es gibt also unendlich viele Lösungen. Tatsächlich, bezogen auf den Kontext der Aufgabe?

Es bleiben einige Fragen, wie:

- Ist es sinnvoll, in Cent ganzzahlige Lösungspaare herauszufinden?
  Sind Gewinnerwartungen exakte Werte?
- Wie weit lassen sich die Herrstellungskosten senken (untere Schranke für die Herstellungskosten)?
- Werden Herstellungskosten und Verkaufspreis in einer Fabrik für ein Produkt wie Socken tatsächlich stückweise berechnet?

Mathematik – Realität

Aufgaben mit nur zwei Variablen weisen zumeist nur geringe Realitätsbezüge auf, daher sollte gegen Ende der Unterrichtsreihe ein etwas komplexeres Problem modelliert werden. Eine Lösung liefert vielleicht der Computer.

Aufgabe 6

> Ein Kaffee-Spezialgeschäft will aus den Sorten A, B und C eine Sondermischung herstellen. Von den Sorten A und B stehen jeweils 100 kg zur Verfügung, von der Sorte C 50 kg.
> Damit die Mischung die gewünschten geschmacklichen Eigenschaften hat, muss sie mindestens 25% der Sorte A und höchstens 50% der Sorte C enthalten.
> Der Preis für Sorte A beträgt 15 €/kg, für Sorte B 12 €/kg und für Sorte C 10 €/kg. Die Mischung soll 14 €/kg kosten.
>
> Welche Mengen von jeder Sorte muss die Mischung enthalten, damit der Gesamterlös möglichst groß ist?

Lösungsvorschläge:

In der Mischung seien enthalten x_1 kg von Sorte A, x_2 kg von Sorte B und x_3 kg von Sorte C.
Dann ergibt der Text dieses Modell:

$$\begin{array}{l} x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \\ x_1 \leq 100 \\ x_2 \leq 100 \\ x_3 \leq 50 \\ x_1 \geq 0{,}25\,(x_1 + x_2 + x_3) \\ x_3 \leq 0{,}50\,(x_1 + x_2 + x_3) \end{array} \quad \text{vereinfacht} \quad \begin{array}{ll} \text{I} & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \\ \text{II} & x_1 \leq 100 \\ \text{III} & x_2 \leq 100 \\ \text{IV} & x_3 \leq 50 \\ \text{V} & -3x_1 + x_2 + x_3 \leq 0 \\ \text{VI} & -x_1 - x_2 + x_3 \leq 0 \end{array}$$

Ziel $= (14-15) \cdot x_1 + (14-12) \cdot x_2 + (14-10) \cdot x_3 \;\rightarrow\;$ max, vereinfacht:
Ziel $= -x_1 + 2x_2 + 4x_3 \;\rightarrow\;$ max
Ein Lösungsversuch mit einer Tabellenkalkulation führt zu:

Von Sorte A werden 50 kg, von Sorte B 100 kg und von Sorte C 50 kg zu der neuen Mischung zusammengefügt.

Der maximale Gesamterlös liegt bei 350 €.

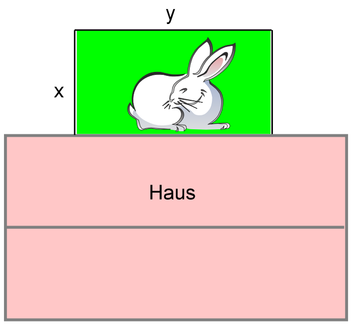
Nichtlineare Optimierung

Als Ausblick kann noch die folgende Standardaufgabe gewählt werden:

Aufgabe 7

Viktoria will für ihr Zwergkaninchen ein rechteckiges Gehege direkt an der Hauswand einrichten. Sie hat dafür 3 Meter passenden Drahtzaun auf einer Rolle.
Wie soll sie die Seitenlängen wählen, damit der Flächeninhalt maximal wird?

Lösungsvorschläge:

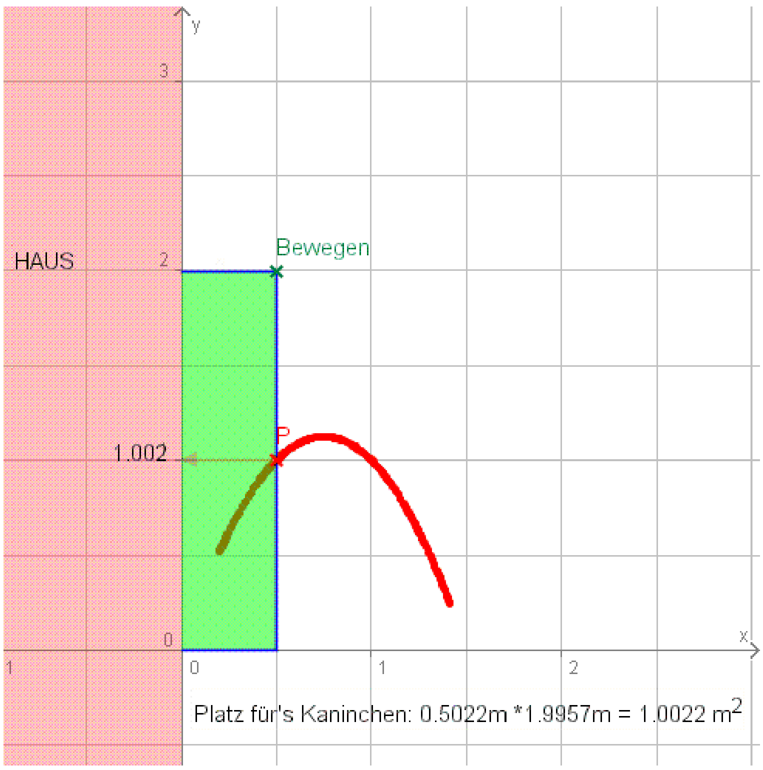


Nichtnegativitätsbedingungen: $x, y \geq 0$,
Nebenbedingung: $2x + y = 3$ *(Zaunlänge)* $\Rightarrow y = 3-2x$,
Ziel: $Z(x,y) = x \cdot y \to \max$.

Wird y eingesetzt, ergibt sich die Zielfunktion: $Z(x) = -2x^2 + 3x$, also eine nach unten geöffnete Parabel (eine nichtlineare Funktion).
Der Scheitelpunkt liegt bei $(0{,}75|1{,}125) \Rightarrow x = 0{,}75$ und $y = 1{,}5$ (Nebenbedingung), das größte (rechtwinklige) Gehege ist damit 1,5 m lang und 0,75 m breit.
Der maximale Flächeninhalt ist 1,125 m², was aber nicht gefragt wird.

Zu dieser Aufgabe liegen Arbeitsblätter mit der Geometrie-Software „Geonext" vor, welche den funktionalen Zusammenhang mit zwei Variablen ebenso visualisieren wie den davon abhängigen mit einer.

(Die Abbildung zeigt das Applet des 2. Arbeitsblattes. Ein Bewegen des Eckpunkts des Geheges ändert nicht nur dieses Gehege und zeigt das Flächenmaß an, sondern hinterlässt als Spur die Parabel, die sich durch die Elimination einer der beiden Variablen ergibt.)



An dieser Stelle kann auch auf Aufgaben aus V1 hingewiesen werden, in denen optimale Werte gesucht wurden (z.B. Aufgabe 6, Konservendose) und statt obiger eine ähnliche bearbeitet (und näherungsweise gelöst) werden.

Abschließende Aufgabe

Blicken Sie auf den Themenbereich „Lineare Optimierung" zurück und verschaffen Sie sich einen Überblick:

- Beschreiben Sie die nach ihrer Meinung charakteristischen mathematischen Inhalte und, soweit dies möglich ist, wie sich diese vom Sachkontext einer Aufgabe ableiten lassen.
- Sehen Sie Verbindungen zu früheren Themen der Mathematik, zu anderen Fächern oder zu Sachverhalten außerhalb der Schule? Wenn ja, geben Sie diese an (auch unter Verwendung graphischer Mittel) und begründen Sie Ihre Angaben.

Dieser (ziemlich anspruchsvolle) „mathematische Aufsatz" kann auch z.B. in ein Lerntagebuch integriert im Laufe der Unterrichtsreihe entstehen.

Literatur

Quellen:

Aufgabe 1: HÄNKE, KLINKER, SCHNEIDER · Einführung in die Mathematik, Angewandte Mathematik · Diesterweg Verlag, Frankfurt 1974

Aufgaben 2, 3: ROSS BRODIE / STEPHEN SWIFT · QMaths 12b
Moreton Bay Publishing, Melbourne 1996

Aufgabe 5: [2]

Aufgabe 6: KARL SCHICK · Lineares Optimieren · Diesterweg Salle Verlag, Frankfurt 1972

Bücher:

[1] REICHEL, MÜLLER · Lehrbuch der Mathematik 5 · öbv&hpt, Wien 2002, S. 228 - 249
22 Seiten zu diesem Thema mit sehr vielen Aufgaben · *(zu beziehen über: www.e-LISA.at)*

[2] ROLF SCHÖWE / JOST KNAPP / RUDOLF BORGMANN · Lineare Algebra, Kaufmännisch-wirtschaftliche Richtung · Cornelsen Verlag, Berlin 1998
23 Seiten incl. Simplexverfahren mit vielen Beispielen und vielen Aufgaben überwiegend mit ökonomischem Hintergrund

[3] Das große Tafelwerk interaktiv · Cornelsen Verlag, Berlin 2003, S. 17
Auf der CD zusätzlich eine Beispielaufgabe.

Internet-Adressen:

[4] Einführung in die Lineare Optimierung (mit Modellplotter):
http://www.bhak1.salzburg.at/Handelsakademie/mam_material/LO
Einblick in die Entstehung der Linearen Optimierung, schrittweise Einführung in Probleme mit 2 Variablen, verschiedene JAVA-Applets.

[5] Modellierung mit Linearer Optimierung:
www.schule.suedtirol.it/blikk/angebote/modellmathe/ma1430.htm
Hier finden sich auch etliche weitere interessante Modellierungsprojekte.

Diese und weitere Links finden Sie auf der Download-Seite.

Zu den Aufgaben vorhandene Dateien (mit Ordnerangabe):

Arbeitsmaterial für Schülerinnen und Schüler

1a)	Geonext-Seite mit Hilfedateien: *V4-start.html* Zugehörige Geonext-Datei *(V4-01a.gtx)* *>>>>Siehe nachstehenden Hinweis.*	**Geonext** **Geonext\geonext-normal**
1b)	Lösung *(V4-01b.dfw)*;	**Derive**
2)	Lösung *(V4-02.dfw)*;	**Derive**
3)	Lösung (ohne Zielfunktion, da diese ja von der Fragestellung abhängt) *(V4-03.dfw)*;	**Derive**
5)	Arbeitsblatt *(V4-0A.xls, V4-05.qpw)*, Lösung für a) und b) *(V4-05L.xls, V4-05L.qpw)* „Spielen" mit Lösungsverfahren *(V4-05bS.xls, V4-05bS.qpw)* Gibt es ganzzahlige Lösungen in Cent zu 5b)? *(V4-05b-ganzzahlig.dfw)*	**Excel** oder **Quattro Pro** **Derive**
6)	Arbeitsblatt *(V4-06A.xls)*, Lösung *(V4-06L.xls)*. Arbeitsblatt *(V4-06A.qpw)*, Lösung *(V4-06L.qpw)*	**Excel** **Quattro Pro**
7)	Visualisierung der funktionalen Zusammenhänge: *V4-start.html* Zugehörige Geonext-Datei *(V4-07.gtx)*. *>>>>Siehe nachstehenden Hinweis.*	**Geonext** **Geonext\geonext-normal**

(Version vom 08.02.05)

Hinweise zu den Geonext HTML-Seiten:

- Die Datei *geonext.jar* muss im Ordner *Geonext* sein, im gesamten Pfad darf kein Umlaut vorkommen,
- der verwendete Browser muss JAVA-Applets unterstützen.

Autor: Winfried Euba

Zeitvorschlag: 15 Stunden (von 90)

V1	**V2, V3 oder V5**	**V4**	**V6**