V5 · Geometrie

Übersicht

Inhalte

Dieser Themenbereich ermöglicht einen kleinen Einblick in einen ganz speziellen Teil der Geometrie, der enge Verbindungen zur Algebra aufweist: die Kegelschnitte (Kreis, Ellipse, Parabel, Hyperbel). Neben den geometrischen Orten und den Gleichungen der Kegelschnitte wird auf die Tangenten von Kreis, Ellipse und Parabel eingegangen, auf Normale und Sekanten. Kegelschnitte treten in vielen unterschiedlichen Bereichen der Realität auf; das wird in vielen Aufgaben dokumentiert, manchmal auch mit entsprechenden Rotationskörpern. Mittel der Geometrie und der Algebra wechseln sich ab.
Alle Aufgaben sind als HTML-Serie vorhanden, in die etliche Geonext-Applets eingebettet sind. An vielen Stellen wird Hilfe gegeben, z.T. durch schon vorhandene Elemente etwa für eine Konstruktion, z.T. durch anklickbare Hilfefenster.
Weitere Informationen zu den HTML-Dateien und eine Aufgaben-Übersicht mit den sonstigen dazu vorhandenen Dateien finden sich auf S. 19f.

Methodische und didaktische Hinweise

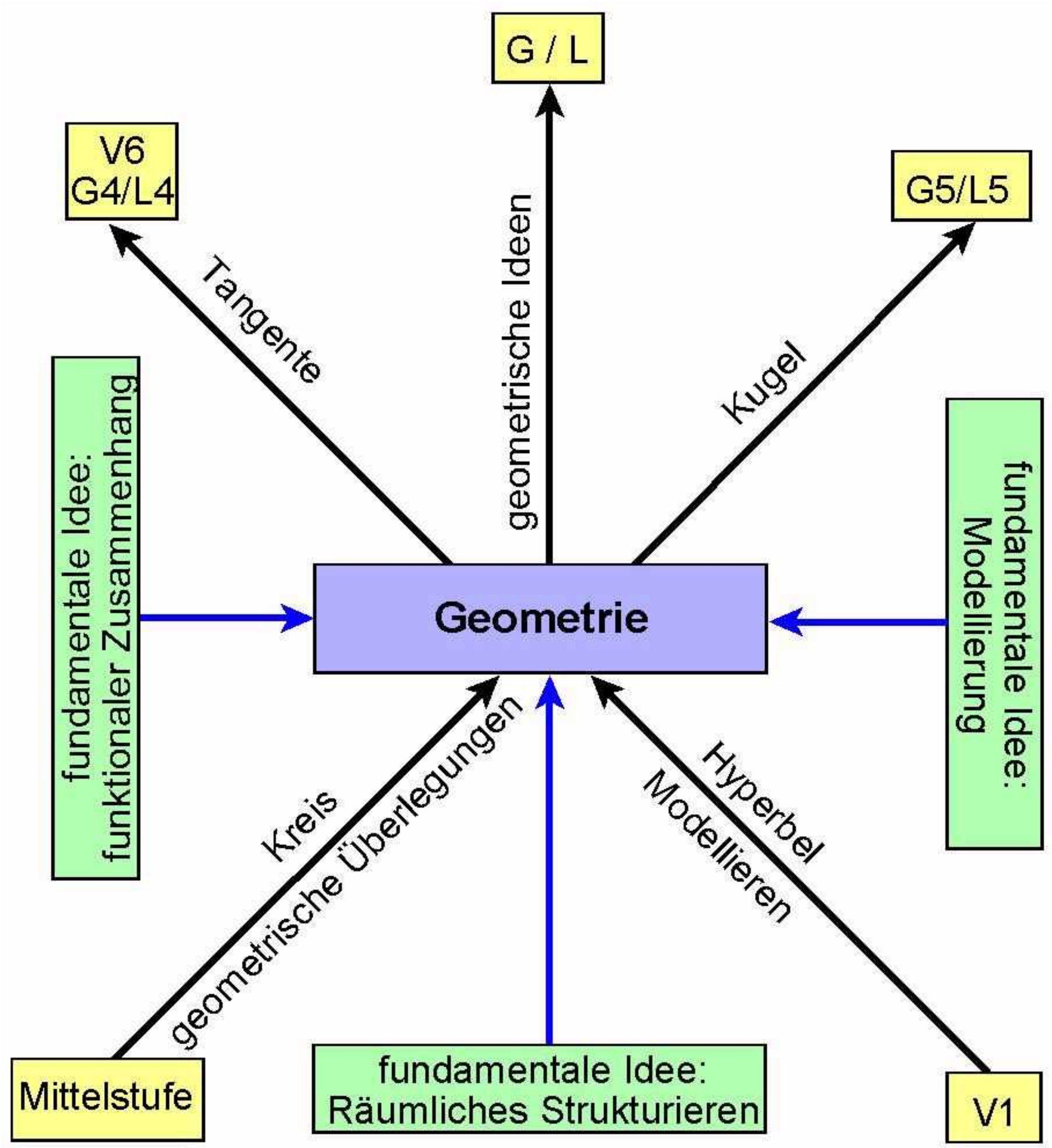
Die Aufgaben 1, 5, 7 und 9 führen als paradigmatische Beispiele in den jeweiligen Kegelschnitt ein, es ist außer beim Kreis entweder die Konstruktion oder der geometrische Ort oder die Funktionsgleichung gegeben und die beiden nicht gegebenen Objekte müssen ermittelt werden. Diese Aufgaben können gut in Partnerarbeit gelöst werden, wenn man den Computer verwendet. Partnerarbeit fördert den Dialog zu den Inhalten aber auch zur Bedienung der Software.
Die HTML-Seiten sind für die Hand der Schülerinnen und Schüler bestimmt, daher kann auch zu Hause damit gearbeitet werden.
Die Aufgaben 5, 7 und 9 sind auch ohne Computer lösbar, wenn man bei 5) die Konstruktion der Ellipse vorführt, ähnliches gilt prinzipiell für alle Aufgaben. Bei Aufgabe 1 steht die algebraische Sicht im Vordergrund, man muss sich jeweils die Funktionsterme der einzelnen Fahrradteile überlegen, was ohne graphische Veranschaulichung möglich, aber weniger informativ ist. Ein Beamer im Kursraum ist bei dieser Aufgabe und einigen anderen ein möglicher Kompromiss.
Bei den realitätsbezogenen Anwendungen sind zumeist Alternativen angegeben, die auch zur Differenzierung verwendet werden können.
Aufgabe 8 behandelt Tangenten als Grenzlage von Sekanten und führt so in Richtung der Ableitung, besonders in der Zusatzaufgabe c1), die von einem Lernenden vorgetragen werden könnte.
Aufgabe 10 geht auf die Kegelschnitte direkt ein und auf Zusammenhänge der Kurven. Diese Aufgabe geht über den Rahmenplan etwas hinaus, sie ist aber ohne allzu großen Zeitaufwand mithilfe der vorbereiteten Arbeitsblätter zu behandeln.
Auf Beweise wurde aus Zeitgründen zumeist verzichtet, der Vorschlag zur Lösung von 5c) könnte diesen Umstand exemplarisch beleuchten.
Der Themenbereich schließt wie immer mit einem Rückblick. Die Schülerinnen und Schüler sollen sich hier in kurzer Form eine thematische Übersicht erstellen und noch einmal reflektieren, wo sie eher geometrisch und wo eher algebraisch gearbeitet haben.
Zu den Aufgaben 3c) und 9a) gibt es HTML-Arbeitblätter, die in die Aufgaben-Serie nicht direkt

eingebunden, aber anklickbar sind. Sie können aber auf Wunsch gelöscht aus dem Verzeichnis *Start* entfernt werden (siehe *liesmich.txt* im Verzeichnis *V5-Aufgaben*). Eigenvorschläge der Lernenden sind natürlich erwünscht, können aber auch nicht erzwungen werden.

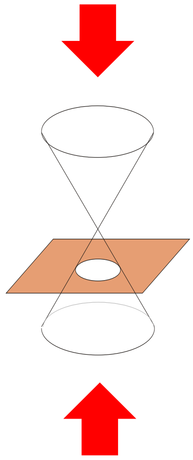
Ziel dieses Themenbereiches ist es auch dafür zu werben, dass geometrische Ideen und Vorgehensweisen an geeigneten Stellen in vielen Themenbereichen sinnvoll und nützlich sein können.

Vernetzungen

Jeder Lernende (und auch jeder Lehrende) muss und wird sich eigene Vernetzungen schaffen und konkret ausformen. Im Unterricht sollten aber dazu Angebote kommen: Die folgende Grafik gibt einen Überblick, in welchen Bereichen Vernetzungen im Prinzip wünschenswert sind.



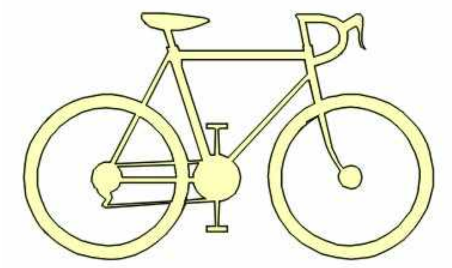
Vorschläge für den Unterricht



1. Kreis

Aufgabe 1 (Paradigmatisches Beispiel)

In dieser Aufgabe soll die Erinnerung an den Kreis belebt werden und zugleich eine Verbindung zwischen der Sicht der Geometrie und der Algebra.

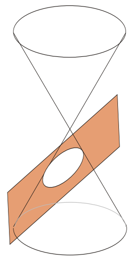


a) Versuchen Sie mit einem CAS ein Fahrrad zu zeichnen (bzw. anzudeuten).

   a1) Überlegen Sie zunächst, wie der Funktionsterm eines (Halb-)Kreises lautet.

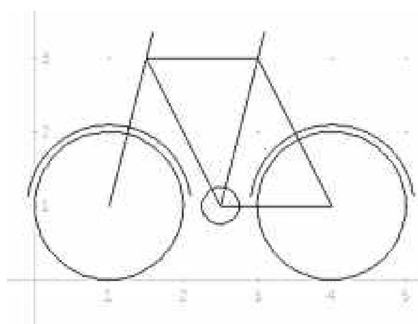
   a2) Warum muss der ganze Kreis in zwei Teilen gezeichnet werden?

b) Versuchen Sie, die Punkte auf dem Kreis geometrisch zu charakterisieren: welche Eigenschaft zeichnet sie aus?
Z.B. der Kreis ist die Menge aller Punkte, die .....



Hinweise zur Lösung.

a) *Es geht um die Erinnerung an den Term für den Kreis wenigstens in Mittelpunktslage (oder dessen Entwicklung):* $y^2 + x^2 = r^2$.
Da man nur ein Rad in den Nullpunkt legen kann, braucht daher auf jeden Fall die allgemeine Form $(y-y_M)^2 + (x-x_M)^2 = r^2$.
Für die Rahmenteile des Fahrrads sind Kenntnisse nötig, wie Geraden geeignet angepasst werden können.



Der Kreis ist keine Funktion, da es für fast alle x-Koordinaten zwei zugehörige y-Koordinaten gibt (*oder* weil man beim Auflösen der Gleichung nach y zwei Terme erhält).

Hinweise:
Etwa in „Derive“ ist die Eingabe der Kreisgleichung möglich, es wird der ganze Kreis gezeichnet. Das gilt für den Funktionsplotter von „Geonext“ nicht.
Zu dieser Aufgabe gibt es ein Geonext-Arbeitsblatt und eine Derive-Datei. Beides hat jeweils seinen eigenen Reiz.

b) Der Kreis ist die Menge aller Punkte in der Ebene, die von einem festen Punkt (dem Mittelpunkt M) denselben Abstand (Radius r) haben *(oder ähnliche Formulierungen)*.

Aufgabe 2

Hier werden die Begriffe „Tangente“, „Sekante“ und „Normale“ wiederholt bzw. eingeführt. Der Aufgabentext bezieht sich auf das zugehörige Geonext-Arbeitsblatt, das sich natürlich auch mit anderen Geometrie-Programmen realisieren lässt, aber ebenso mit Zirkel und Lineal.

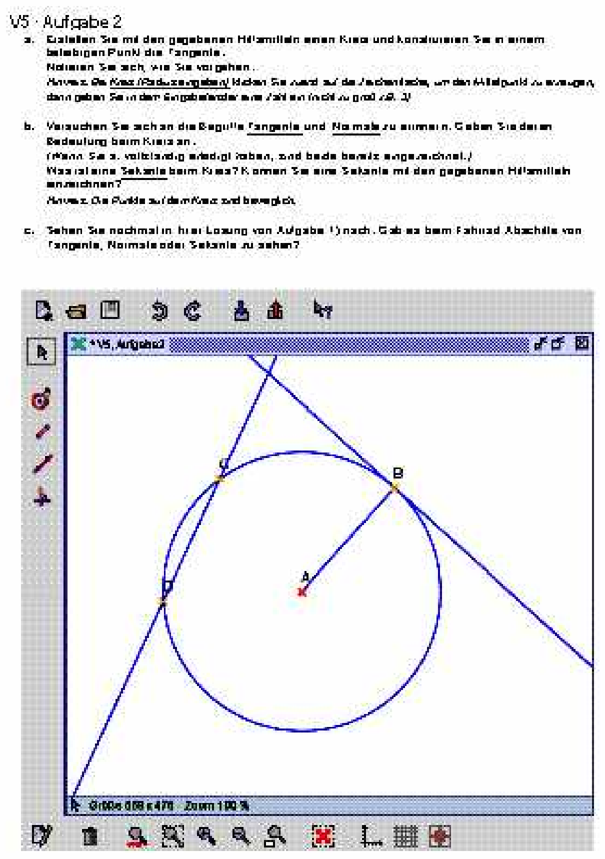
Im Arbeitsblatt sind als Hilfsmittel gegeben Kreis (Radius eingeben), Strecke, Gerade, Senkrechte; das Menü mit allen anderen Möglichkeiten ist nicht zugänglich.

a) Erstellen Sie mit den gegebenen Hilfsmitteln einen Kreis und konstruieren Sie in einem beliebigen Punkt die Tangente.
Notieren Sie sich, wie Sie vorgehen.

b) Geben Sie die Bedeutung der Tangente beim Kreis an.
Vermutlich habe Sie eine Hilfslinie zur Konstruktion der Tangente eingezeichnet. Welche Eigenschaft hat diese Strecke? Die zugehörige Gerade heißt übrigens Normale.
Was ist eine Sekante beim Kreis? Können Sie eine Sekante mit den gegebenen Hilfsmitteln einzeichnen?

c) Sehen Sie in Ihrer Lösung von Aufgabe 1) nach: Gab es beim Fahrrad Abschnitte von Tangente, Normale oder Sekante zu sehen?

Lösungsvorschläge:



a) bezogen auf Geonext
(1) Mittelpunkt wählen und Radius 3 eingeben.
(2) Radius einzeichnen: Objekt „Strecke“ wählen, Mittelpunkt und beliebigen Kreispunkt aussuchen.
(3) Tangente: Objekt „Senkrechte“ wählen, dann Radius anklicken, zuletzt Punkt B.
(4) Sekante: Objekt „Gerade“ wählen und 2 beliebige Punkte auf Kreis angeben.

b) Die Normale ist eine Senkrechte zur Tangente, geht also beim Kreis durch den Mittelpunkt, die Tangente berührt den Kreis einmal (Tangente und Kreis haben genau einen gemeinsamen Punkt), eine Gerade, die genau zwei Punkte mit dem Kreis gemeinsam hat, heißt Sekante.

c) Etwa die Gabel des Lenkrades kann als Teilstrecke einer Normalen gedeutet werden, Teile des Rahmens könnten parallel zu Tangenten liegen.

Aufgabe 3

Der Kreis wird in realitätsnahen Problemstellungen betrachtet. Die Schülerinnen und Schüler sollen dabei angeregt werden, sich auch selbst eine entsprechende Aufgabe zu stellen.

a) Vielleicht haben Sie ja ein Tachometer an Ihrem Fahrrad, das nicht nur die Geschwindigkeit, sondern auch die Entfernung misst. Dazu wird ein z.B. magnetisches Plättchen zwischen den Speichen montiert und ein Stift zum Abnehmen des Signals an der Gabel. Beschreiben Sie, wie das Messen der Entfernung vor sich gehen könnte und wie die Geschwindigkeitsangabe.

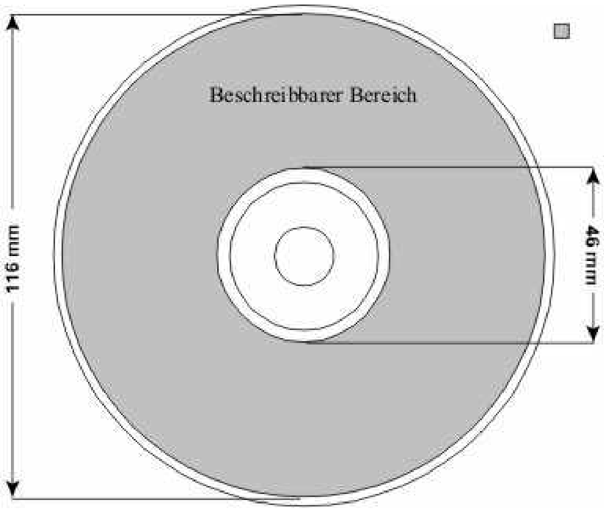
b) Berechnen Sie das Maß der Fläche, die 1 MB auf einer CD ungefähr einnimmt.

c) Kreise kommen in der Realität sehr oft vor, nicht nur beim Rad oder der CD. Suchen Sie sich ein Anwendungsbeispiel und stellen Sie sich dazu eine kleine Aufgabe, die Sie natürlich auch lösen sollen.

Lösungsvorschläge:

a) Mithilfe des Plättchens wird die Anzahl der Umdrehungen des Reifens gemessen. Soll daraus der zurückgelegte Weg bestimmt werden, benötigt man den Umfang des Reifenmantels, der schwanken kann in Abhängigkeit von der Art des Reifens, vom aktuellen Luftdruck im Reifen und von der aktuellen Profilhöhe. Die vorhandene Möglichkeit, die Radgrößen einzustellen, reicht daher nur aus, angenäherte Werte zu erhalten.
Bei Interesse kann etwa ermittelt werden, welche Unterschiede sich zwischen voll aufgepumpten und schwach aufgepumpten Reifen ergeben.
Mit der Uhr kann das Gerät aus den gefahrenen Kilometern die Geschwindigkeit errechnen, die bei den gefahrenen Kilometern aufgetretenen Fehler übertragen sich.

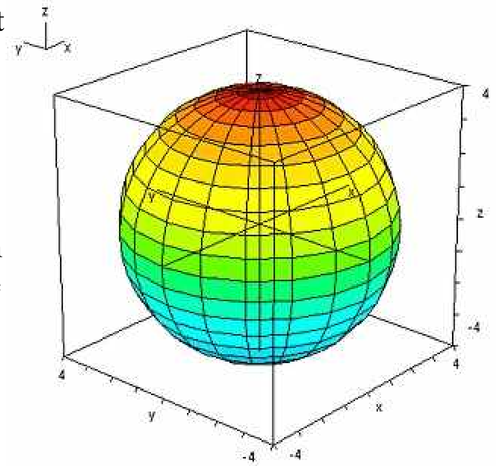
b) *Zunächst muss man sich die nötigen Daten beschaffen. Das kann man notfalls auch mit Nachmessen. Dass die ermittelten Werte leicht unterschiedlich sein können, liegt auf der Hand.*
Nach nebenstehender Grafik beträgt der Innendurchmesser des beschreibbaren Bereichs 46 mm, der Außendurchmesser 116 mm. Das Flächenmaß ist daher $\pi \cdot (58^2 - 23^2)$ mm^2, also etwa 8906 mm^2 bzw. 89 cm^2
Auf eine CD passen zumeist 700 MB an Daten, das heißt, 1 MB benötigt weniger als 13 mm^2.
Das kleine Quadrat oben rechts hat entsprechend den gegebenen Größen etwa eine Fläche von 13 mm^2.



c) *Ideal ist natürlich, wenn die Lernenden eigene Fragestellungen finden. Zur Not kann man Tipps geben:*
Siehe z.B. in [1]: Fenster/Architektur, S. 60f, Typographie, S. 71, Fernsehsatellit, S. 64ff und viele weitere Aufgaben zum Thema.
Siehe dazu auch „Geonext"-Arbeitsblatt (V5-HamburgerWelle.html).

Aufgabe 4

a) In Aufgabe 1b) haben Sie versucht, die Eigenschaft aller Punkte auf einem Kreis zu charakterisieren. Übertragen Sie Ihre Beschreibung auf die Kugel.



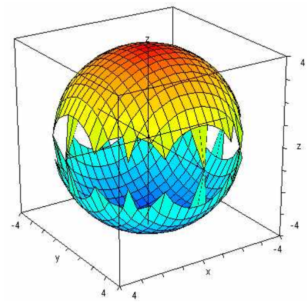
b) Versuchen Sie ebenfalls, die Funktionsgleichung für einen Kreis auf die Kugel zu übertragen, eventuell zunächst für den Fall, dass der Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems liegt. Testen Sie Ihre Lösung dann mit einem geeigneten Computerprogramm (z.B. Derive, wo aber die Kugel nur mit Trick so wie abgebildet aussieht).

c) Beschreiben Sie, wie das Schnittgebilde von zwei sich schneidenden Kugeln aussieht.
Geben Sie ein realitätsbezogenes Beispiel an, bei dem diese Aufgabenstellung von Bedeutung ist.

Lösungsvorschläge:

a) Die Kugel ist die Menge aller Punkte im Raum, die von einem festen Punkt (dem Mittelpunkt M) denselben Abstand (Radius r) haben *(oder ähnliche Formulierungen)*.

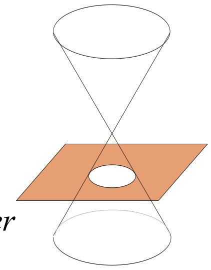
b) $(x-x_M)^2 + (y-y_M)^2 + (z-z_M)^2 = r^2$
In Derive ist diese Eingabe nicht möglich, man muss nach einer Variablen (etwa z) auflösen und diesen Term eingeben, genauer 2 Terme (mit Vorzeichenwechsel). Das optische Ergebnis befriedigt kaum (siehe Abbildung). Obiges Bild entsteht, wenn r = 4 eingegeben wird und als Koordinatensystem „sphärisch" gewählt wird – und man zusätzlich noch an bestimmten Einstellungen „dreht", siehe Derive-Handbuch.



c) Betrachtet man nur die Oberflächen der beiden Kugeln, so ergibt sich ein Kreis. Z.B. bei Navigationssystemen muss sicher gestellt sein, dass sich das System im Bereich von 4 Satelliten befindet. Der Bereich, in dem Signale von einem Satelliten empfangen werden können, ist näherungsweise ein Kreis, da Erde und Signalausbreitung jeweils mit einer Kugel gut beschrieben werden können.

Ein interessantes historisches architektonisches Objekt ist das Pantheon in Rom, das Kugel und Kreis (und Zylinder und Quadrat...) in genialer Weise miteinander verbindet. Bei Interesse von Schülerinnen und Schülern ein mögliches Referats-Thema oder auch für's Portfolio.

2. Ellipse

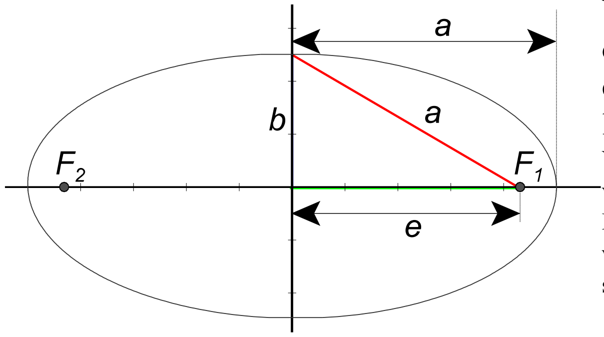


Aufgabe 5 (Paradigmatisches Beispiel)

Die erste Teilaufgabe bezieht sich auf ein „Geonext"-Applett, in dem die Ellipse mit der „Gärtner-Konstruktion" entsteht.

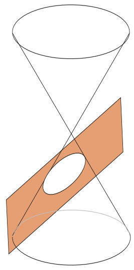
a) Beobachten Sie, wie die Ellipse entsteht.
Die Konstruktion basiert auf einer möglichen Beschreibung der Eigenschaft aller Punkte auf der Ellipse. Entwickeln Sie diese Beschreibung.

b) Unten sehen Sie eine Ellipse mit den wichtigsten Bezeichnungen. F_1 und F_2 sind dabei die Brennpunkte.



Versuchen Sie herauszufinden, wie die Funktionsgleichung einer (halben) Ellipse lautet.

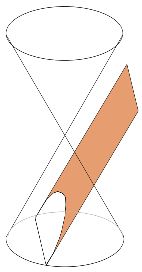
Vielleicht hilf Ihnen dabei, dass in vielen Grafik-Programmen die Ellipse aus dem Kreis entsteht, wenn man den Kreis geeignet staucht oder streckt.



c) Versuchen Sie, eine Tangente an die Ellipse zu konstruieren.

Lösungsvorschläge:

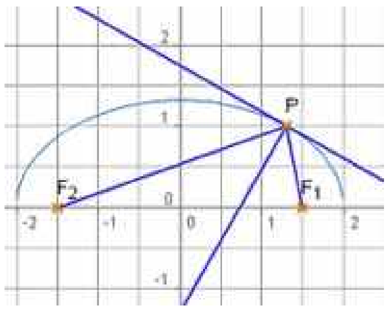
a) Die Ellipse besteht aus allen Punkten, die von zwei festen Punkten F_1 und F_2 eine konstante Abstandssumme haben *(oder so ähnlich)*.

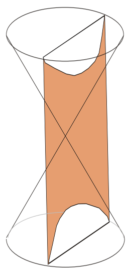


b) Die Gleichung der Ellipse in Mittelpunktslage lautet $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, analog die Gleichung für die allgemeine achsenparallele Lage.
Nimmt man einen Kreis in Mittelpunktslage mit dem Radius a ($x^2 + y^2 = a^2$), so entsteht eine Ellipse, wenn man jede y-Koordinate mit dem Faktor a/b multipliziert:

$$x^2 + \left(\frac{a}{b} \cdot y\right)^2 = a^2$$

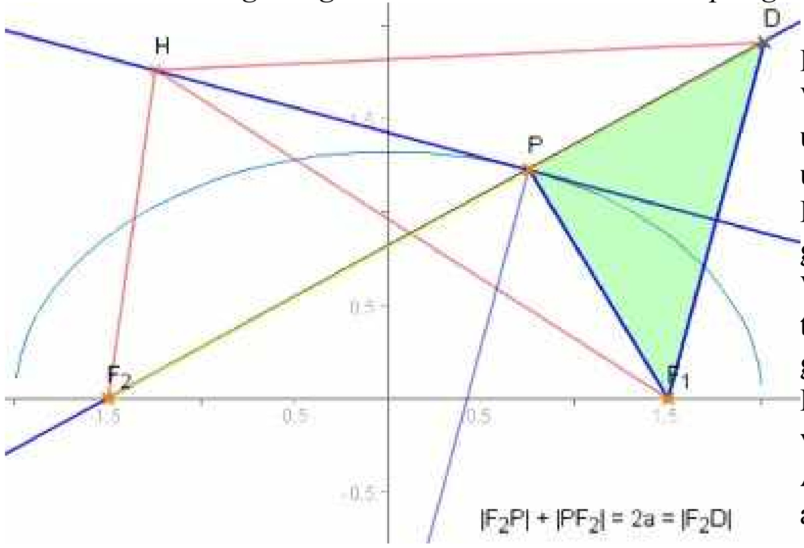
c) *Eventuell die Lösung von Lernenden:*
1. Konstruktion der Winkelhalbierenden des Winkels F_2PF_1.
2. Konstruktion der Senkrechten dazu im Punkt P ergibt die Tangente.





Daraus folgt, dass Strahlen, die den Gesetzmäßigkeiten der Optik folgen, von einem Brennpunkt der Ellipse in den anderen reflektiert werden, worauf einige Anwendungen basieren (s.u.).

Diese Konstruktion sieht überzeugend aus, ist jedoch kein Beweis, da ja nicht gezeigt ist, dass die scheinbare Tangente genau einen Punkt mit der Ellipse gemeinsam hat.



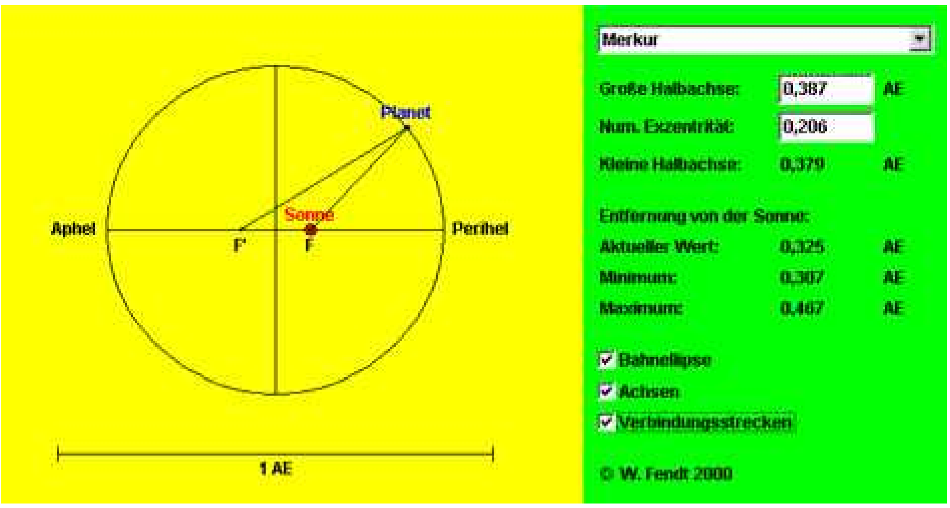
P ist ein Punkt auf der Ellipse. Wir verlängern die Strecke F_2P um eine Strecke der Länge $|PF_1|$ und erhalten so als Endpunkt D. Damit ist das Dreieck F_1PD gleichschenklig.
Wir vermuten, dass die Symmetrieachse dieses Dreiecks die Tangente ist.
Dazu zeigen wir, dass jeder von P verschiedene Punkt auf dieser Achse, den wir H nennen, nicht auf der Ellipse liegen kann:
Aus Symmetriegründen ist $|HF_1| = |HD|$ und daher $|F_2H| + |HF_1| = |F_2H| + |HD| > |F_2D| = 2a$. Mit der Definition der Ellipse folgt die Behauptung, denn $|F_2P| + |PF_1| = 2a$ und $|F_1D| = 2a$ nach Konstruktion.

Die Symmetrieachse ist also Tangente und halbiert den Winkel F_1PD. Dann halbiert die zugehörige Normale den Winkel F_2PF_1, obige Konstruktion ergibt also wirklich Tangente und Normale.

Zum Beweis gibt es die Seite *V5-05c-Beweis.html*, die zwar bei den Aufgaben-Seiten dabei ist, aber nicht im Menü auftaucht. Zum Einbinden in das Menü siehe *liesmich.txt* im Ordner *V5-Aufgaben*.

Eine Möglichkeit, sich über Aspekte der geschichtlichen Entwicklung und zugleich über eine aktuelle Anwendung von Ellipsen zu informieren, bietet die CD „Experiment Zukunft“ [6] unter Raumfahrt *den Punkt* Geschichte *wählen, es öffnet sich* frühe Astronomie. *Auf der darauf folgenden Seite werden die* Keplerschen Gesetze *erläutert, für das erste und zweite Gesetz mit einem Java-Applet.*

Applet zum 1. Keplerschen Gesetz



Will man mehr über die Kegelschnitte erfahren, so ist Appolonios von Perge *(260? - 190? v.Chr.) wichtig, der basierend auf* Euklid *eine abstrakte Theorie der Kegelschnitte entwickelte und die Namen Ellipse, Parabel, Hyperbel einführte (siehe auch S. 15). Er wandte sie auch in der Astronomie an, unter anderem zur Verbesserung von Berechnungen im geozentrischen Modell unseres Sonnensystems. Wie damit* Claudius Ptolemäus *rund 350 Jahre später die Bahnen von Sonne,* *Mond und den damals bekannten Planeten fast so genau angeben konnte wie 1400 Jahre später KEPLER, ist in [2], S. 196ff nachzulesen.*

Die folgende Aufgabe ist für die erste Variante formuliert:

Aufgabe 6

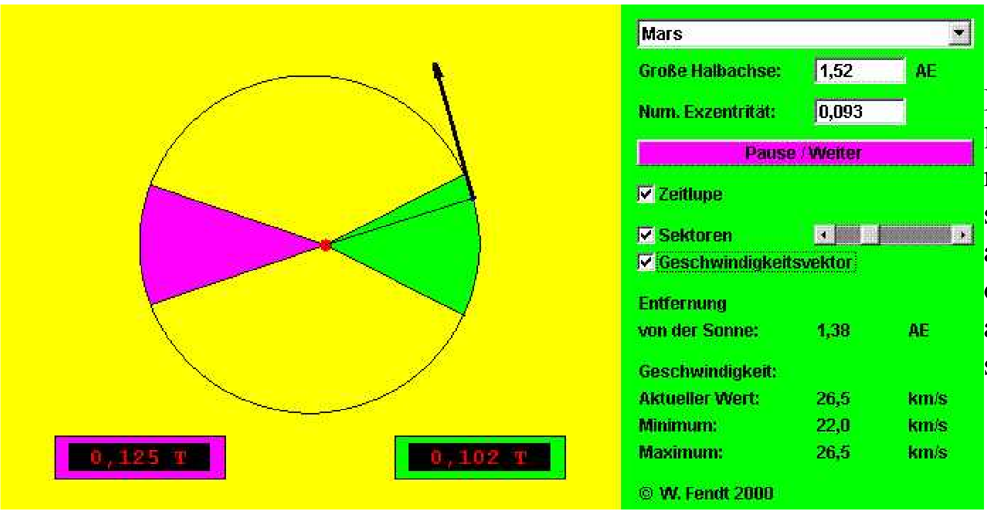
Informieren Sie sich mit der CD „Experiment Zukunft“ im Thema „Raumfahrt“ über deren geschichtliche Entwicklung. Dabei geht es vor allem um die Seiten „frühe Astronomie“ und die „Keplerschen Gesetze“.

Erläutern Sie die Bedeutung der Ellipse im Bezug auf dieses Thema und speziell die Bedeutung einer Tangente der Ellipse.

Hinweis: Die CD gibt es auch online unter http://www.3sat.de/nano/experiment-zukunft

Lösungsvorschläge:

Die Ellipse als Bahnkurve der Planeten sollte sicher kommen, auch wenn die Bahn bis auf den Halleyschen Kometen kreisförmig wirkt, da die Brennpunkte vergleichsweise nahe beieinander liegen (siehe Abbildung oben).

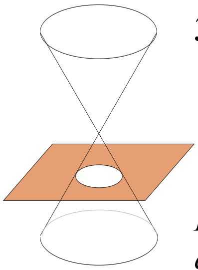


Im Applet zum 2. Keplerschen Gesetz kann man sich den Geschwindigkeitsvektor anzeigen lassen, der offensichtlich tangential wirkt (siehe nebenstehende Abbildung).

Interessant sind auch Anwendungen der Ellipse im medizinischen Bereich.

Beispiele:

- *Nierensteinzertrümmerer (siehe [7])*
- *Linse zur Regulierung von Astigmatismus, die zwei Brennpunkte aufweist (siehe [8]).*

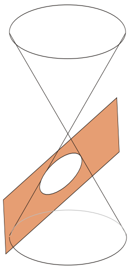


3. Parabel

Aufgabe 7 (Paradigmatisches Beispiel)

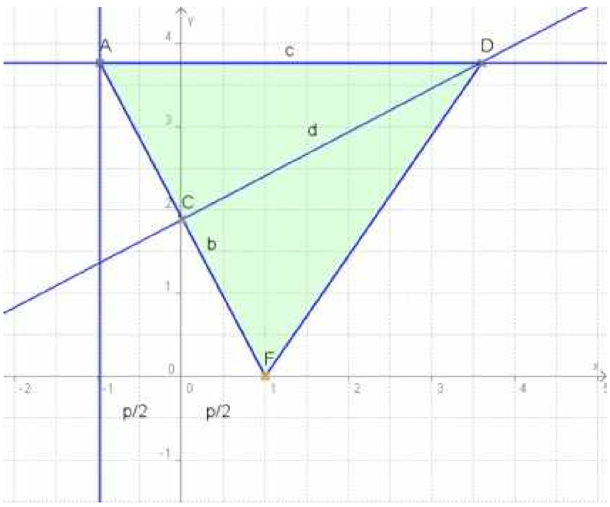
Der geometrische Ort der Punkte einer Parabel ist vorgegeben und soll Grundlage für die Konstruktion sein.
Im 2. Teil wird aus der Konstruktion die Funktionsgleichung entwickelt.

> Eine Parabel ist eine ebene Kurve, bei der für jeden Kurvenpunkt P der Abstand zu einem festen Punkt F der Ebene (Brennpunkt) genau so groß ist wie der Abstand von einer Geraden (Leitgerade).
>
> a) Konstruieren Sie eine Parabel.
>
> b) Entwickeln Sie die Funktionsgleichung der konstruierten Parabel.

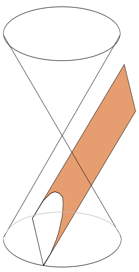


Lösungsvorschläge:

a) beliebiger Punkt A auf der Leitgeraden a
(Verbindungs-)Strecke AF (b)
Mittelpunkt C von b
Senkrechte zur Leitgeraden durch A (c)
Senkrechte zu b in C (d)
Schnittpunkt von c und d (D).



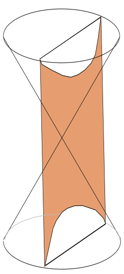
Begründung:
Dreieck ACD ist kongruent zu Dreieck FCD:
- |AC| = |CF| nach Konstruktion
- Seite d stimmt überein
- Winkel bei C jeweils 90°.



⇒ |AD| = |FD| und D liegt daher nach Konstruktionsvorschrift auf der Parabel.
Es fällt sicher auch den Schülerinnen und Schülern auf, dass die Konstruktion eine Tangente und Normale beinhaltet.

b) Funktionsgleichung:

D ist beliebiger Parabelpunkt mit den Koordinaten (x|y), F(1|0) (im Beispiel)
Dann ist $|FD| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2}$ und $|AD| = |x+1|$ und nach Vorschrift ist $|FD| = |AD|$. Um Wurzel und Betrag zu beseitigen, wird quadriert:
$(x-1)^2 + y^2 = (x+1)^2 \Rightarrow y^2 = (x+1)^2 - (x-1)^2 = 4x$ *(doppelter Mittelterm).*
Die Gleichung $\mathbf{y^2 = 4x}$ beschreibt die Parabel, gibt jedoch keine Funktion wieder:
Die Parabel wird auch durch die beiden Äste $f_{oben}(x) = 2\sqrt{x}$ und $f_{unten}(x) = -2\sqrt{x}$ beschrieben, die Funktionen sind.
Die Berechnung für einen beliebigen Brennpunkt erfolgt analog.
Wenn ein Lernender sieht, dass der Graph der Parabel gegenüber der Standardparabel aus dem bisherigen Unterricht um 90° gedreht ist (bzw. an der Winkelhalbierenden gespiegelt), ist jedenfalls für's Beispiel die passende Wurzelfunktion klar.
Wenn es offenbar niemand gesehen hat, kann die Frage gestellt werden, wieso hier die Wurzel auftritt.



Aufgabe 8

In Aufgabe 7 haben Sie eine Parabel mit geometrischen Mitteln konstruiert. In der Konstruktion tauchten Tangente und Normale auf. Im zweiten Teil der Aufgabe entwickelten Sie aus der Konstruktion die Funktionsgleichung. Hier geht es wieder um Parabeln und Tangenten, allerdings eher aus der Sicht der Algebra. Gleichung und Graph der Parabel sind Ihnen daher wohl vertrauter als die in der Geometrie übliche (gedrehte) Form.

a) Versuchen Sie, zur Parabel p mit $p(x) = -x^2 + 4$ näherungsweise die Gleichung der Tangente an einen beliebigen Punkt P zu ermitteln. Wählen Sie dazu ein festes P (es sollte aber nicht sofort der Scheitelpunkt sein) und nähern Sie die Tangente mithilfe von Sekanten an.

   Beschreiben Sie, wie Sie vorgehen.

   Geben Sie den Term der Näherung ein und lassen Sie sich diese Gerade darstellen. Notieren Sie sich die aktuelle x-Koordinate von P und die Steigung dieser Geraden. Verschieben Sie den Punkt P und wiederholen Sie die obigen Arbeitsabläufe. Sie hüllen so die Kurve gewissermaßen mit Tangenten ein.

   Wie sieht die Tangente im Scheitelpunkt aus?

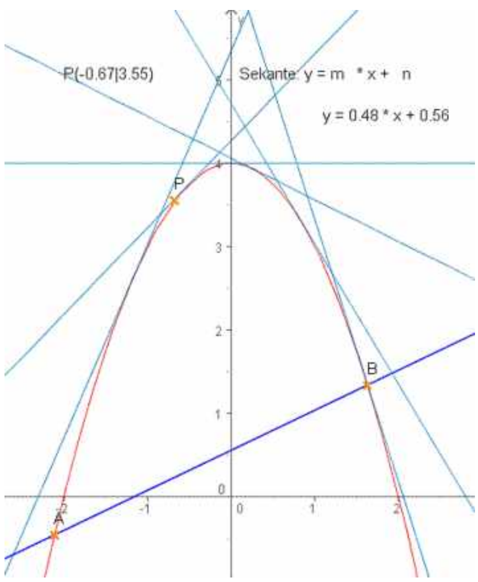
b) Begründen Sie:

   Nicht jede Gerade, die mit der Parabel nur einen Punkt gemeinsam hat, ist eine Tangente an die Parabel.
   Hinweis: Sie werden an anderen Funktionen noch sehen, dass dort Tangenten oft mehr als einen gemeinsamen Punkt mit der Funktion aufweisen.

Zusatzaufgaben:

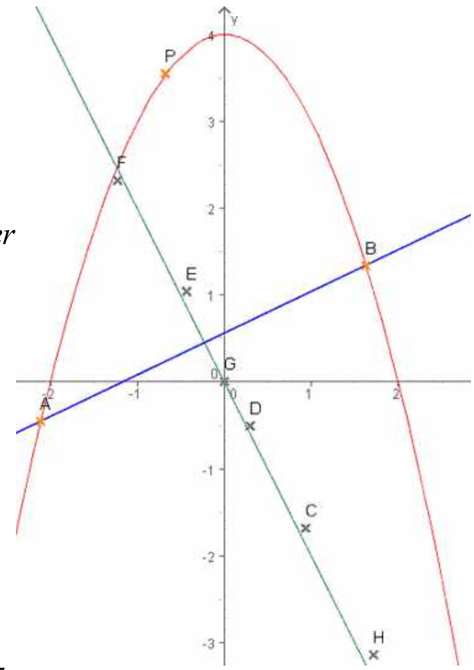
c1) Tragen Sie als Punkte die oben notierten x-Koordinaten mit den Steigungen in die Zeichnung ein. Beschreiben Sie die Lage dieser Punkte.
c2) Wo liegt der Brennpunkt dieser Parabel, wo die Leitgerade?
Wenn Sie diese Frage beantworten konnten, versuchen Sie, eine Tangente zu konstruieren und den Term zu berechnen. Vergleichen Sie mit Ihrer Näherung.

Lösungsvorschläge:



a) Bei der Näherung sind verschiedene Methoden denkbar: Man kann sich mit beiden Schnittpunkten der Sekante dem Punkt P nähern, man kann aber auch einen der Schnittpunkte auf P legen und sich mit dem andern Schnittpunkt nähern. Die im Arbeitsblatt zu erzielenden Tangenten sind Näherungen.
Die einhüllende Geradenschar kann auch umgekehrt zur Konstruktion der Parabel verwendet werden (siehe [1], S. 86).
Die Tangente im Scheitelpunkt sollte etwa parallel zur x-Achse werden, was z.B. mit der Symmetrie dieser Parabel zur y-Achse begründet werden könnte.

b) Begründung:
Jede Parallele zur y-Achse ist keine Tangente, hat aber nur einen gemeinsamen Punkt mit der Parabel *(oder ähnliche Gegenbeispiele)*.



Zusatzaufgabe:
Die eingezeichneten Punkte sollten näherungsweise auf einer Geraden (genauer der Geraden g mit g(x) = −2x) liegen. (Siehe Abbildung für die Punkte C, D, E, F, G und H)

Wir berechnen zunächst den Brennpunkt für die Parabel p_2 mit $p_2(x) = x^2$ und verschieben dann. Für den Brennpunkt F_2 von p_2 gilt $F_2\ (0|y_{F2})$. Bei der Berechnung zu 7b) vertauscht man jetzt x und y und erhält $x^2 = 4 \cdot y_{F2} \cdot y$, also $y = \frac{1}{4y_{F2}} \cdot x^2 = x^2$. Damit ist $y_{F2} = ¼ = 0{,}25$ und somit $y_F = 3{,}75$. Die Leitgerade ist l mit $l(x) = 4{,}25$.

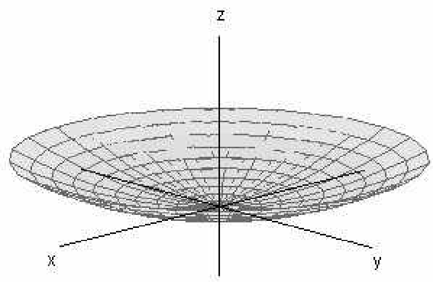
Nun schiebt man P auf einen Punkt, für den man näherungsweise die Tangente bestimmt hat und konstruiert die Tangente nach 7a).

Aufgabe 9

Hier geht es um Anwendungen von Parabeln in der Realität, wobei geometrisches und algebraisches Vorgehen jeweils unterschiedlich vorteilhaft erscheint.

a) Wählen Sie ein reales Objekt (z.B. Gebäude, Brücke), dessen Kontur wie eine Parabel aussieht und überprüfen Sie Ihre Vermutung geeignet.
Wie gehen Sie bei der Überprüfung vor, mit Werkeugen der Geometrie oder der Algebra?

b) Ein Paraboloid ist eine Parabel, die um eine ihrer Achsen rotiert.
In nebenstehender Abbildung sehen Sie z.B. eine Satellitenantenne, die aus der Rotation einer Parabel p mit $p(x) = 0{,}05\ x^2$ entstanden ist.



Klären Sie die folgenden Fragen:
- Wie wird ein beliebiger Strahl reflektiert, wenn er auf den Graphen der Parabel trifft und Einfallswinkel = Ausfallswinkel gelten soll?
- Wie werden Strahlen, die parallel zur z-Achse in die Antenne einfallen, reflektiert?
- Welche Auswirkung hat eine Veränderung des Durchmessers für die Verwendung dieser Satellitenantenne?
- Wäre obige Parabel p ein geeignetes Modell für eine im privaten Bereich verwendete „Satellitenschüssel“?

Haben Sie Werkzeuge der Geometrie oder der Algebra verwendet?

Hinweise zur Lösung:

a) *In einem optionalen Arbeitsblatt zu dieser Aufgabe (V5-BerlinerBogen.html) ist die Vorderansicht des Hamburger Bürohauses „Berliner Bogen" vorgegeben. Die Kontur kann durch Veränderung von Schiebereglern mit einer Parabel überdeckt werden. Es ist also ein algebraisches Vorgehen gewählt, weil es hier einfach zum Ziel führt.*
Bei der Qualität des Fotos (Maßstab, Verschiebungen, Drehungen) ist natürlich eine solche Konturüberdeckung kein Beweis für die Parabelform.

b) Wie wird ein beliebiger Strahl reflektiert, wenn er auf den Graphen der Parabel trifft?
Tangente im Punkt, an dem der Strahl auftrifft, konstruieren und Strahl an der Normalen spiegeln. Dann ist Einfallswinkel = Ausfallswinkel.
Dieses Beispiel zeigt eine Eigenschaft von Tangente und Normale.

Wie werden Strahlen, die parallel zur z-Achse in die „Schüssel" einfallen, reflektiert?
Nach Konstruktion werden sie alle in den Brennpunkt geleitet.

Welche Auswirkung hat eine Veränderung des Durchmessers für die Verwendung dieser Satellitenantenne?
Die Anzahl der erfassten Strahlen ändert sich und damit die Empfangsstärke im Brennpunkt, in welchem die einfallenden Strahlen gebündelt werden.
Hier scheint das geometrische Werkzeug einfacher zur Lösung zu führen. Die Antwort hängt aber natürlich von der gewählten Strategie ab.

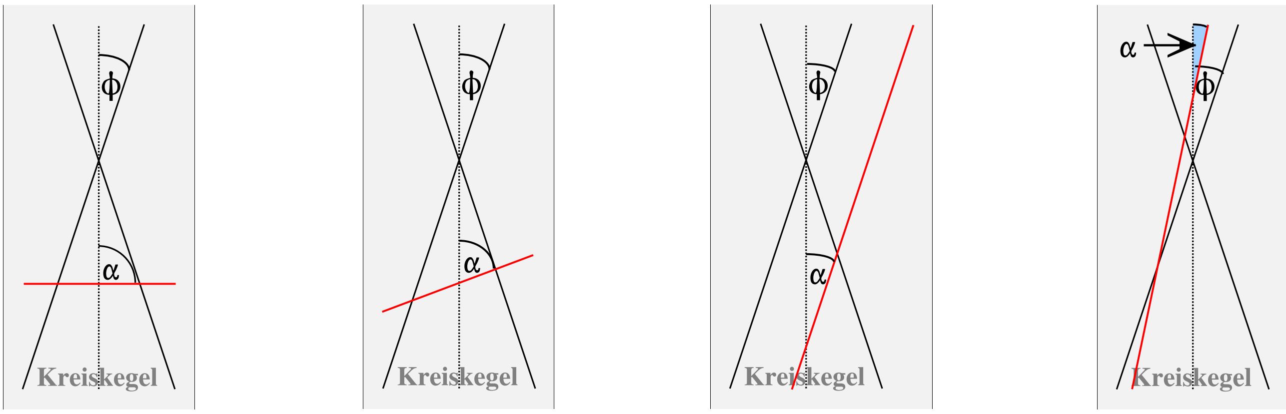
Wäre obige Parabel p ein geeignetes Modell für eine im privaten Bereich verwendete „Satellitenschüssel"?
Es fehlt bei p eine Angabe zur Maßeinheit auf der x- und y-Achse. Wählt man Meter, so ergibt sich für eine „Schüssel" vom Durchmesser 80 cm = 0,8 m eine Tiefe von 3,2 cm (0,05 · 0,64 = 0,032), wählt man jedoch Zentimeter, so wäre die „Schüssel" 80 cm tief (0,05 · 1.600 = 80).
Im 1. Fall scheint p geeignet, im 2. Fall eher nicht.
Bei dieser Frage war das Werkzeug Algebra vorgegeben, wenn auch unvollständig, sodass noch räumliche Vorstellung zur Antwort nötig ist.

Weitere Anwendungen siehe z.B. in [1], S. 80ff (sehr viele Aufgaben und Aufträge), und in [3], S. 41ff „Wie fliegt eigentlich der Ball durch die Luft?"

Information

Die bisher betrachteten Objekte Kreis, Ellipse und Parabel sowie die noch folgende Hyperbel haben eine entscheidende Gemeinsamkeit: Sie sind Kegelschnitte. Schneidet eine Ebene einen (geraden) Kreiskegel, so ist die Schnittfläche in der Ebene begrenzt durch eines der genannten Objekte, in Abhängigkeit vom Schnittwinkel (bis auf spezielle Sonderfälle).
In den folgenden Abbildungen ist der Schnitt eines geraden Kreiskegels zu sehen (entlang des Durchmessers des Grundkreises). Die Seitenlinien schneiden die Mittelsenkrechte im Winkel ϕ, die Ebene schneidet die Mittelsenkrechte im Winkel α. Dann gilt

Kreis	**Ellipse**	**Parabel**	**Hyperbel**
$\alpha = 90^\circ$	$\phi < \alpha \leq 90^\circ$	$\alpha = \phi$	$0^\circ \leq \alpha < \phi$



Diese Aussagen bedürfen eines Beweises, den wir hier nicht führen. *Für einen Beweis siehe z.B. [2], S. 175ff.*

Aufgaben 10

Es gibt jedoch noch weitere Merkmale, die den Zusammenhang (und Unterschied) der Kegelschnitte beschreiben. Wir wählen die <u>numerische Exzentrizität</u> ϵ, weil sie auch mit Abständen zu tun hat und auf der Parabel-Definition basiert.

Wir betrachten einen Kurvenpunkt P, den Brennpunkt F und eine Leitgerade mit einem Punkt L, sodass $\overline{LP}$ senkrecht zur Leitgerade ist. Dann ist ϵ das Verhältnis der Abstände

$$\epsilon = \frac{|\overline{PF}|}{|\overline{PL}|}.$$

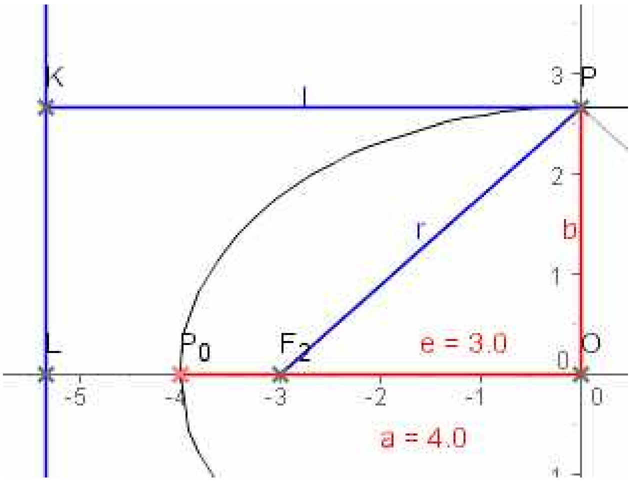
Nach Definition gilt für die Parabel $\epsilon = 1$ (siehe Aufgabe 7)

Durch welche ϵ werden Ellipsen, durch welche Hyperbeln erzeugt?

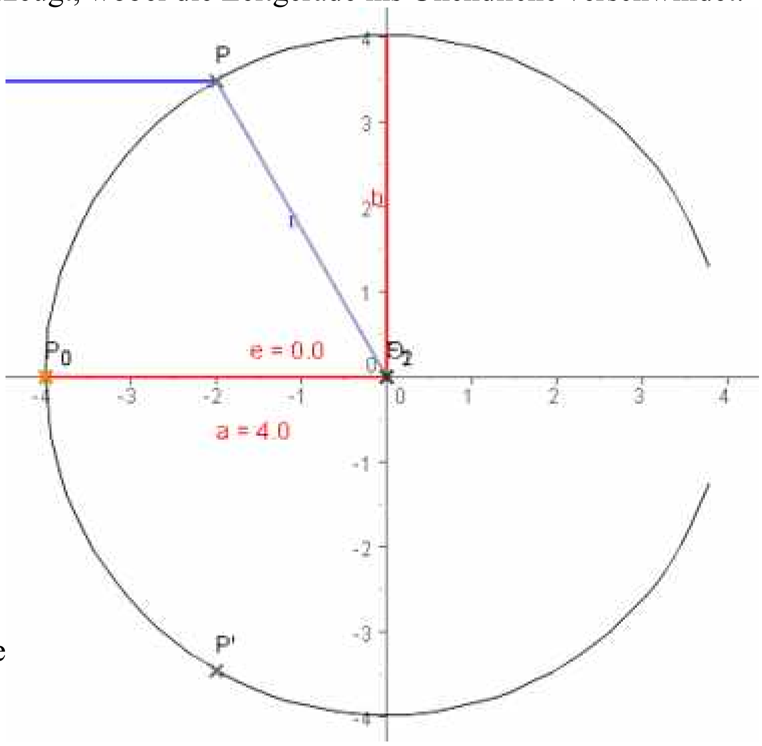
<u>Hinweise zur Lösung:</u>

Durch Experimentieren mit dem zugehörigen Geonext-Arbeitsblatt kann man herausfinden, dass $0 < \epsilon < 1$ Ellipsen, $\epsilon > 1$ Hyperbeln ergibt, auch wenn der Bereich um $\epsilon = 1$ nur schwer zu untersuchen ist. Im Folgenden soll es nur um Ellipsen gehen.
Die Konstruktion im Geonext-Arbeitsblatt erzeugt jedenfalls nicht alle denkbaren Ellipsenformen, denn Leitgerade und Brennpunkt F sind gegeben und damit a und b jeweils in Abhängigkeit von ϵ.
Die folgende Konstruktion zeigt aber, dass wirklich für alle Ellipsen $0 < \epsilon < 1$ gilt.
Wir betrachten zur Vereinfachung Ellipsen in Mittelpunktslage. Das ist keine Einschränkung, da sich jede Ellipse entsprechend verschieben lässt. Vorgegeben sei ist die Strecke a und das ϵ, in der folgenden Abbildung ist $a = 4$ und $\epsilon = 0{,}75$ gewählt.

Dann schneidet die Leitgerade (links) die x-Achse bei $-\frac{a}{\epsilon}$, denn mit den Bezeichnungen der Abbildung ist $\frac{r}{1} = \epsilon$, also $1 = \frac{r}{\epsilon}$, und in der Ellipse ist für diese Wahl von P gerade $r = a$ (siehe Aufgabe 5).



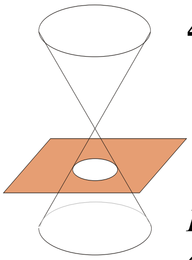
Weiter hat der Punkt P_0 die Koordinaten $(-a|0)$ und der Brennpunkt F_2 $(-a\cdot\epsilon|0)$ (siehe Abbildung). F_2 folgt aus $|P_0F_2| = \epsilon \cdot |P_0L| = \epsilon \cdot (a/\epsilon - a) = a - a\cdot\epsilon$.
Mit der Länge a und dem Punkt F_2 kann die Länge b konstruiert oder auch berechnet werden, durch die geschickte Lage der Ellipse ist der Betrag der x-Koordinate von F_2 gleich e und damit gilt $e = a \cdot \epsilon$.
Aufgelöst nach ϵ ergibt sich die bei Ellipsen sonst übliche Definition von ϵ: $\epsilon = \frac{e}{a}$.
Damit gilt also $\epsilon = \frac{|\overline{PF}|}{|\overline{PL}|} = \frac{e}{a}$ und es folgt sofort $0 < \epsilon < 1$. Dass wirklich alle denkbaren Ellipsenformen erzeugt werden, kann man sich so klar machen: Für jedes a wird durch die Wahl von ϵ b festgelegt und zwar mit $0 < b < a$. Für $b = a$, also $\epsilon = 0$, wird ein Kreis von Geonext erzeugt, wobei die Leitgerade ins Unendliche verschwindet.



Dabei fallen die Strecken r und s zusammen und F_2 wandert in den Nullpunkt, sodass sich die entsprechenden Bezeichnungen überlagern.

Dieses ϵ (in beiden Definitionen) gilt als Maß dafür, wie weit die Parabel vom Kreis abweicht. Das kann man im dynamischen Arbeitsblatt sehr schön beobachten. Für ϵ gegen 1 wird die Ellipse entsprechend flach. Für jedes mögliche a können wir also mit obiger Konstruktion jede denkbare Ellipse konstruieren, quasi von der „Linie" bis zum Kreis.
Beim Erstellen einer solchen Konstruktion erlebt man zugleich die „doppelte" Symmetrie, die auch im Arbeitsblatt sichtbar wird, wenn man P_0 auf die rechte Seite zieht...

Mit der eben verwendeten Definition der numerischen Exzentrizität lässt sich der Kreis einfacher mit einbeziehen. Die Funktionsgleichungen aller Kegelschnitte lassen sich dann nämlich zusammenfassen zu $y^2 = 2px - (1-\epsilon^2)\cdot x^2$. p ist dabei die Ordinate eines Brennpunkts.
Die Namen der Kegelschnitte stammen von APOLLONIOS von Perge (siehe [4], S. 70ff) und basieren auf dem Zusammenhang zwischen einer Flächenanlegung und ϵ: für $\epsilon = 1$ gibt es eine reine Flächenanlegung (παραβολή – Parabel), für $\epsilon > 1$ gibt es eine Anlegung mit Überschuss (ὑπερβολή – Hyperbel) und für $0 < \epsilon < 1$ gibt es eine Anlegung mit Mangel oder Defekt (ἔλλειψις – Ellipse). Zur Flächenanlegung siehe [5], S. 128ff.

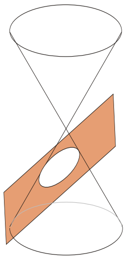


4. Hyperbel

Aufgabe 11

Hier wird die Gleichung der Hyperbel in Mittelpunktslage vorgegeben, der Graph steht dann im Blickpunkt des Aufgabenteils a). Das Verhalten des Graphen an den Rändern des Definitionsbereichs führt auch auf die Asymptoten.
In b) soll aus a) der geometrische Ort geschlossen werden.

Die Funktionsgleichung der Hyperbel in Mittelpunktslage lautet $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Es gilt zudem $e^2 = a^2 + b^2$ und die Brennpunkte sind $F_1(e|0)$ und $F_2(-e|0)$.

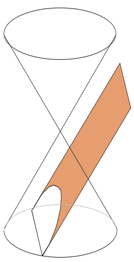


a) Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen.
Wie wird er sich nach Ihrer Meinung für große x verhalten und warum?
Erklären Sie die Auswirkungen der Parameter a und b auf den Graphen.
Wie muss sich obige Gleichung der Hyperbel ändern, wenn das Zentrum nicht mehr im Ursprung liegt?

b) Versuchen Sie, den geometrischen Ort zu finden.

Hinweise zur Lösung:

a) *Es sollte der fast lineare Verlauf am Rand auffallen, vielleicht auch eine Ähnlichkeit zum Graphen von x → 1/x. Die Asymptoten sind zur Beschreibung von b im Arbeitsblatt eingezeichnet, vielleicht werden sie ja genutzt.*
Dass der Graph keine Funktion wiedergibt, sollte ebenfalls bemerkt werden.

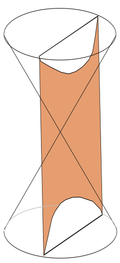


Im 2. Arbeitsblatt kann mit den beiden Reglern für die Parameter a und b deren Wirkung betrachtet werden. Auch die Abhängigkeit von e wird in den Änderungen der Brennpunkte deutlich.
Überlegungen zur Gleichung einer beliebigen verschobenen Parabel können zunächst durch Verschiebungen an nur einer Achse überlegt werden.

Funktionsgleichung für Zentrum $Z(x_Z|y_Z)$: $\frac{(x-x_Z)^2}{a^2} + \frac{(y-y_Z)^2}{b^2} = 1$

Die Gleichungen der Asymptoten a_1 und a_2 in Mittelpunktslage sind

$a_1(x) = \frac{b}{a}\cdot x$ bzw. $a_2(x) = -\frac{b}{a}\cdot x$, bei verschobenem Zentrum ändert sich der Term



entsprechend in $a_{1v}(x) = \frac{b}{a}\cdot(x-x_Z)+y_Z$ bzw. $a_{2v}(x) = -\frac{b}{a}\cdot(x-x_Z)+y_Z$.

Das kann auch sehr gut z.B. mit Derive erprobt werden.

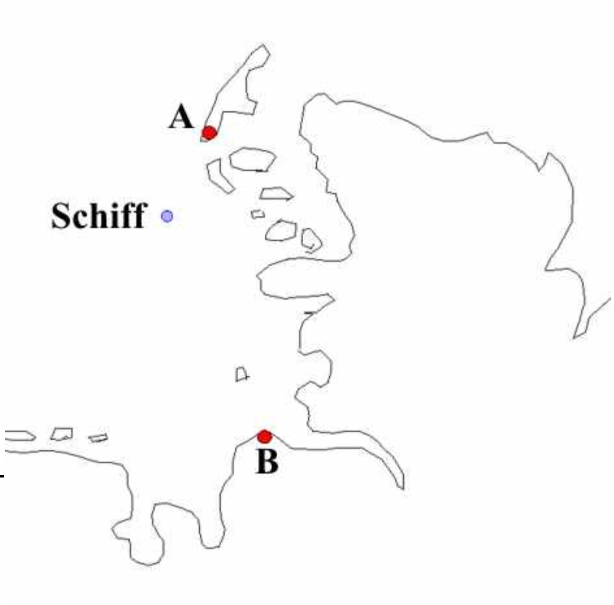
b) Eine Hyperbel ist eine eben Kurve, bei der für jeden Punkt P die Differenz der Abstände zu zwei festen Punkten F_1 und F_2 der Ebene (Brennpunkte) betragsmäßig konstant ist.

Aufgabe 12

In dieser Aufgabe wird ein kurzer Einblick in die Anwendung von Hyperbeln bei der Navigation gegeben.

Die Funk-Navigation ist für die Schifffahrt nach wie vor von großer Bedeutung. Diese Aufgabe gibt einen Einblick in das LORAN Verfahren (**LO**ng **RA**nge **N**avigation).

a) Ein Schiff empfängt von zwei Sendern (A und B) Signale, die von A und B jeweils in einem bestimmten zeitlichen Abstand abgestrahlt werden, der bekannt ist. Wegen der unterschiedlichen Laufweiten ist die zeitliche Differenz des Eintreffens der Signale normalerweise aber eine andere. Angenommen, A und B senden gleichzeitig und auf dem Schiff gehen die Signale in einem zeitlichen Abstand von 1000 µs (= 0,001 s) ein, dann ist das in unserem Beispiel zugleich die Laufzeitdifferenz.
Beschreiben und Skizzieren Sie, wo sich das Schiff befinden könnte, wenn sich die ausgesandten Signale in Lichtgeschwindigkeit (etwa 300m/µs) ausbreiten.



b) Entwickeln Sie ein Szenario, wodurch sich der Standort des Schiffes eindeutig bestimmen ließe. Setzen Sie dabei voraus, dass man auf dem Schiff für einen Sender weiß, dass man davon am weitesten entfernt ist.

Hinweise zur Lösung:

a) Die Laufzeitdifferenz bedeutet eine Differenz der Abstände des Schiffes zu jedem der Sender von 300 km *(genauer der Betrag der Differenz der Abstände ...)*. Das könnte z.B. bedeuten, dass das Schiff 100 km von A und 400 km von B entfernt ist (oder 400 km von A und 100 km von B), aber genauso gut 300 km von A und 600 km von B usw.
Das Schiff kann sich daher nur auf den beiden Ästen einer Hyperbel befinden, deren Brennpunkte die Standorte sind. Weiß man, welcher der beiden Sender dem Schiff näher liegt, kennt man auch den Hyperbel-Ast.

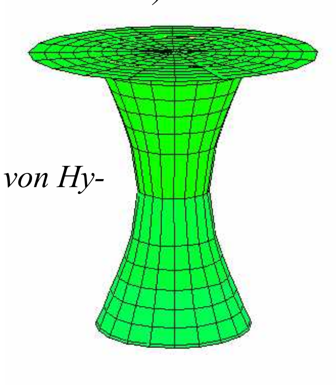
b) Nimmt man einen weiteren Sender C hinzu, so hat man mit diesem und z.B. B ein weiteres Paar, das für die Standorte eine zweite Hyperbel ergibt. Die Schnittpunkte der beiden Hyperbeln sind dann die einzig möglichen Standorte. Ist das Schiff z.B. von B am weitesten entfernt, kann man in beiden Fällen den zugehörigen Hyperbel-Ast bestimmen und somit eindeutig den Standort des Schiffes, falls die Hyperbeln günstig zueinander liegen (also die Senderpaare).
Hinweis: Eine LORAN-C-Senderkette besteht aus einem Hauptsender und 2-4 Nebensendern.
(Vielleicht ergeben sich aber ganz andere sinnvolle Lösungsvorschläge)

Weiterführende Informationen hierzu siehe [9] und [10].

Weitere denkbare Anwendungsbezüge:

- *Eine Kometenbahn kann je nach Art des Kometen (jedenfalls in Teilbereichen) durch einen Kegelschnitt angemessen beschrieben werden: die Bahnkurve (oder ein Teil davon) kann also kreis-, ellipsen-, parabel- oder hyperbelförmig sein.*
  Dieses komplexe Thema eignet sich eher für eine zeitlich nicht so begrenzte Behandlung im Ergänzungskurs.

- *Weniger anspruchsvoll: Dekorationselemente (z.B. ein Tisch) in Form von Hyperboloiden, die mit einem CAS-System konstruiert werden.*



Abschließenden Aufgabe

> Sie sollten in diesem Themenbereich einen Überblick zu den Kegelschnitten Kreis, Ellipse, Parabel und Hyperbel gewonnen haben sowie zum Teil kurze Einblicke in Anwendungsbereiche.
>
> - Versuchen Sie, die Inhalte in übersichtlicher Form kurz darzustellen, sodass Sie selbst auch später einmal nachschlagen und Ihre Aufzeichnungen verstehen können.
>   Vergessen Sie dabei nicht die angesprochenen Realitätsbezüge.
> - Überlegen Sie noch einmal, an welchen Stellen Sie geometrische Vorgehensweisen und Überlegungen verwendet haben, an welchen Stellen algebraische.

Der „Reflexions-Teil“ der Aufgabe, in dem über geometrische und algebraische Vorgehensweisen im Kontext des Themenbereiches reflektiert wird, überlagert sich mit den Anwendungen, da die verwendeten Sicht- und Vorgehensweisen vom Kontext abhängig sind (und natürlich von dem einzelnen Lernenden).

Hinweise

Quellen:

Aufgabe 1: Nach [1], S. 51

Literartur / CD / Links:

[1] THOMAS JAHNKE / HANS WUTTKE · Mathematik 11. Schuljahr · Cornelsen, Berlin 2000
Das Buch bietet etwa 50 Seiten zum Thema Geraden, Kreise, Parabeln.

[2] WOLFGANG KROLL / JÜRGEN VAUPEL · Grund- und Leistungskurs Analysis, Band 2 Dümmler, Bonn 1986
Über 20 Seiten (S. 175ff) mit Kegelschnitten, nicht nur aus der Sicht der Analysis.

[3] HANS-GEORG WEIGAND · Wie die Mathematik in die Umwelt kommt · Schroedel, Hannover 2001

[4] C.J. SCRIBA / P. SCHREIBER · 5000 Jahre Geometrie · Springer-Verlag, Berlin 2001

[5] HELMUTH GERICKE · Mathematik in Antike und Orient · Fourier, Wiesbaden 1992

[6] Experiment Zukunft (CD-ROM) · Südwestrundfunk, Baden-Baden, 2004
online: http://www.3sat.de/nano/experiment-zukunft

[7] Nierensteinzertrümmerer
http://members.aol.com/geometrie11/koorgeom/lithotr1.htm

[8] Astigmatismus (Roche Lexikon Medizin)
http://www.gesundheit.de/roche/ro00000/r2457.html

[9] Hyperbel-Navigation (LORAN-C)
http://members.aol.com/geometrie11/koorgeom/loran_c.htm

[10] Funk-Navigation: LORAN
http://home.t-online.de/home/Hbusch/loran.htm

Die angegebenen Internet-Adressen stehen auch auf der Download-Seite unter „Links“, auch die Seite der verwendeten Geometriesoftware GEONExT (www.geonext.de)

Zu den Aufgaben:

Alle Aufgaben liegen in HTML-Form mit Geonext-Applets (läuft auch) vor. Sie werden in den Ordner *V5-Aufgaben* entpackt und dort durch *start.html* gestartet.
Der Browser muss Javascript akzeptieren und das Ablaufen von Java-Applets ermöglichen (wie z.B. „Internet Explorer“ oder „Mozilla“). In das Verzeichnis der Seiten muss die Datei *geonext.jar* kopiert werden, weil die Applets darauf basieren. Sie ist nicht im Download der HTML-Serie enthalten.
Alle Seiten können einzeln ausgedruckt werden. Sie sind so konzipiert, dass der Ausdruck auf eine Seite passt. Das hängt allerdings auch vom verwendeten Browser ab (z.B. Einstellung zu Kopf- und Fußzeilen, Darstellung der Höhe einer Zeile).
Die Dateien können direkt in Word geladen und bearbeitet werden.
Weitere Informationen finden sich in der Datei *liesmich.txt* im Ordner *V5-Aufgaben*.

Informationen zu den Aufgaben und weiteren Dateien:

In der folgenden Tabelle stehen in der rechten Spalte die weiteren verfügbaren Dateien, die im eben erwähnten Aufgabenpaket enthalten sind. Derive-Dateien werden allerdings in den Ordner *derive* und reine Geonext-Dateien in den Ordner *geonext* entpackt. Es handelt sich dabei um alternative Lösungsdateien und um die Dateien, mit denen die Applets erzeugt wurden.

Kreis		
1	Verbindung Algebra – Geometrie: Fahrrad mit CAS zeichnen, Geometrischer Ort	V5-01.dfw *(Fahrrad gezeichnet)* V5-01-gesamt.gtx,*(Dateien für Applets, incl. Hintergrundbild)*
2	Kreis, Tangente, Sekante, Normale	V5-02.gtx *(Vorlage für Applet)*
3	Kreis an realen Problemstellungen	V5-HamburgerWelle.html *(optional für c)*
4	Verbindung Algebra – Geometrie, realitätsbezogene Problemstellung: Kugel	V5-04.dfw

Ellipse		
5	Verbindung Algebra – Geometrie: Geometrischer Ort, Funktionsgleichung, Konstruktion einer Tangente	V5-05c-Beweis.html *(optionaler Beweis zu 5c)* V5-05-gesamt.gtx *(Vorlage für Applet und exakte Konstruktion der Tangente)*
6	Realitätsbezüge: Keplersche Gesetze, Bedeutung der Tangente	*CD „Experiment Zukunft“ wird benötigt*
Parabel		
7	Verbindung Algebra – Geometrie: Konstruktion, Funktionsgleichung	V5-07-gesamt.gtx *(Vorlagen für Applets)*
8	Tangenten	V5-08.gtx *(Vorlage für Applet)*
9	Realitätsbezogene Anwendungen Parabel, Paraboloid	V5-BerlinerBogen.html *(optional für a)* V5-09b.dfw *(Paraboloid)*
10	Kegelschnitte, gemeinsame Eigenschaft überprüfen an Ellipse	V5-10-gesamt.gtx *(Vorlage fürApplets)* V5-10.dfw *(allgemeine Kegelschnittgleichung)*
Hyperbel		
11	Verbindung Geometrie – Algebra Graph beschreiben, Funktionsgleichung abändern, Geometrischen Ort ermitteln	V5-11-gesamt.gtx *(Vorlagen für Applets)* V5-11.dfw
12	Realitätsbezogene Anwendung: Navigation mit LORAN-Verfahren	V5-12.dfw *(Hyperboloid)*
Abschließende Aufgabe:	Rückblick · Überblick · Geometrie – Algebra	

Autor: Winfried Euba

Zeitvorschlag: 15 Stunden (von 90)

V1	**V2, V3 oder V4**	**V5**	**V6**

Der Zeitvorschlag basiert auf der Annahme, dass die vorbereiteten Arbeitsblätter verwendet werden, da sie zahlreiche Hilfen anbieten. Es können aber auch Aufgaben oder Aufgabenteile gestrichen werden (z.B. Teile von 3), 4), 8), und 9) und 12b)). 10) ist zwar sehr interessant, geht aber über den Rahmenplan hinaus und kann daher auch entfallen).