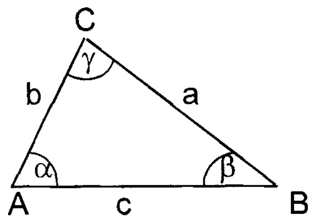
In Dreiecken gibt es folgende Bezeichnungen:
- die Punkte A,B,C.
- die Seiten a,b,c.
- die Winkel α,β,γ.

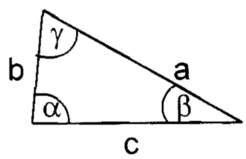
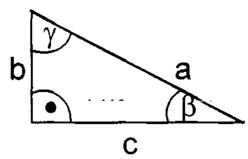
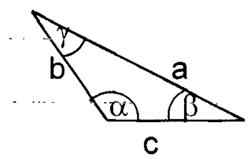
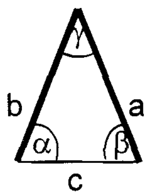
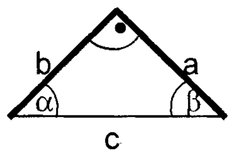
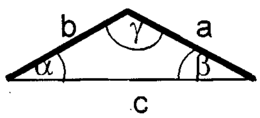
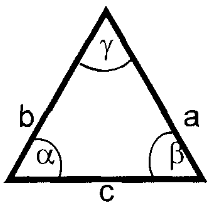


Dem Punkt A mit dem Winkel α liegt die Seite a gegenüber.
Entsprechendes gilt für die Punkte B und C.

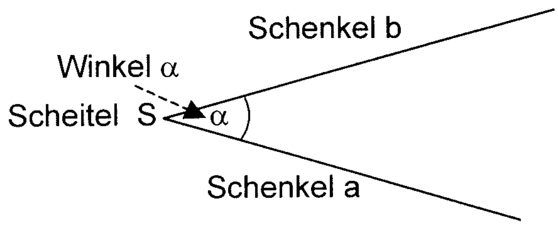
Die Winkelsumme $\alpha + \beta + \gamma$ beträgt im Dreieck immer 180°.

Die beiden Seiten, die einen Winkel einschließen, heißen Schenkel.

1. Dreiecksformen

Dreieck	**spitzwinklig** alle Winkel < 90°	**rechtwinklig** ein Winkel = 90°	**stumpfwinklig** ein Winkel > 90°
ungleichseitig keine Seite gleich lang	 $a \neq b \neq c$ $\alpha \neq \beta \neq \gamma$	 $a \neq b \neq c$ $\alpha = 90°$	 $a \neq b \neq c$ $\alpha > 90°$
gleichschenklig zwei Seiten gleich lang	 $a = b$ $\alpha = \beta$	 $a = b$ $\alpha = \beta$ $\gamma = 90°$	 $a = b$ $\alpha = \beta$ $\gamma > 90°$
gleichseitig alle Seiten gleich lang	 $a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma$		

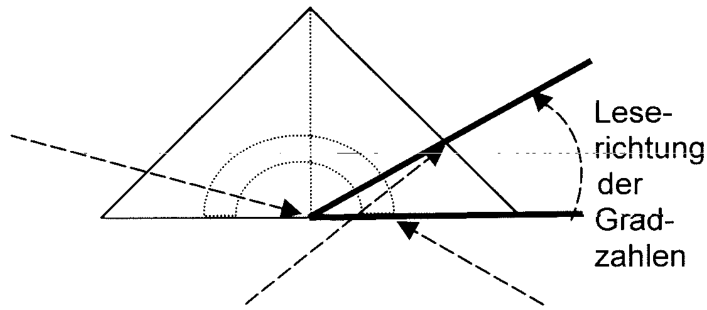
2. Begriffe am Winkel



3. Winkel messen und zeichnen

Winkel messen

Um die Größe eines Winkels zu messen, muß das Geodreieck so angelegt werden, dass sein Nullpunkt genau auf der Spitze des Winkels liegt.

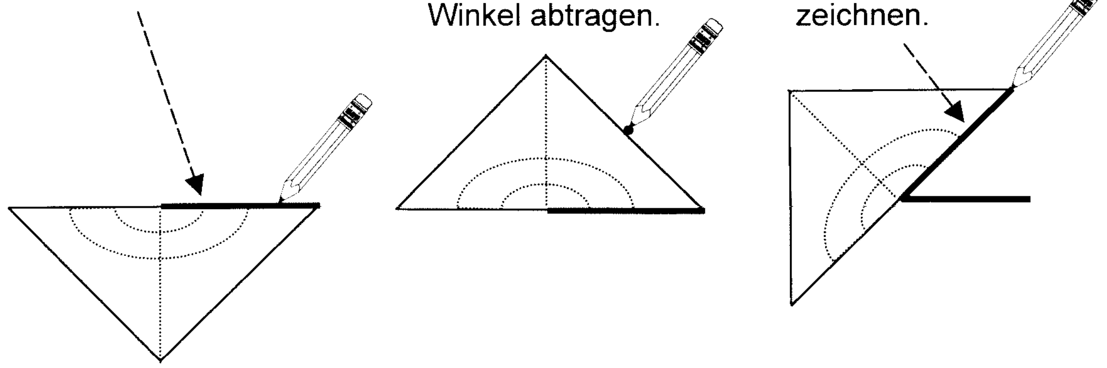


Der Schnittpunkt des freien Schenkels mit dem Geodreieck zeigt die Gradzahl und damit die Größe des Winkels an.

Beginne bei Null!

Winkel zeichnen

Schenkel zeichnen. Am Geodreieck Winkel abtragen. Anderen Schenkel zeichnen.



4. Konstruktion von Dreiecken

Zur Konstruktion von Dreiecken sind mindestens drei Angaben notwendig.
Man unterscheidet je nach Angaben vier verschiedene Konstruktionsmöglichkeiten:

a) SSS (drei Seiten sind bekannt). 

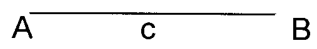
b) SWS (zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel sind bekannt). 

c) WSW (eine Seite und die beiden anliegenden Winkel sind bekannt). 

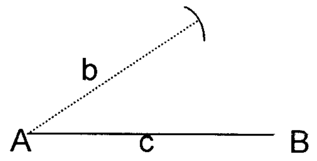
d) SSW (zwei Seiten und der, der längeren Seite gegenüberliegende Winkel sind bekannt). 

Konstruktion nach SSS (gegeben a, b, c)

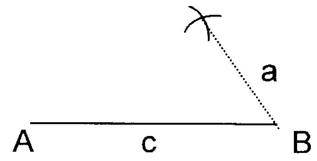
1.) Zeichne eine gegebene Seite (z. B. c).



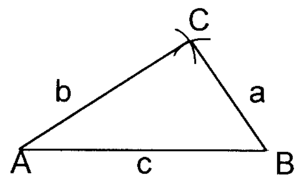
2.) Ziehe um den Punkt A mit einem Zirkel einen Kreisbogen mit dem Radius b.



3.) Ziehe um den Punkt B mit einem Zirkel einen Kreisbogen mit dem Radius a.

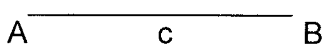


4.) Der Schnittpunkt der beiden Kreisbogen ist der Punkt C. Verbinde ihn mit A und B.

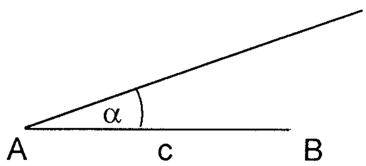


Konstruktion nach SWS (gegeben c, α, b)

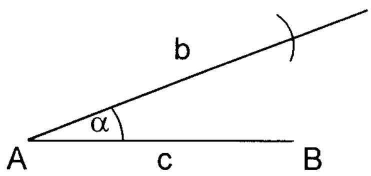
1.) Zeichne eine gegebene Seite (z. B. c).



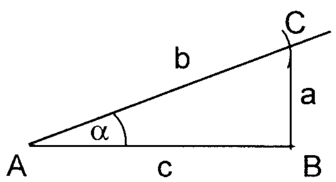
2.) Zeichne den zweiten Schenkel vom gegebenen Winkel α.



3.) Ziehe um den Punkt A mit einem Zirkel einen Kreisbogen mit dem Radius b.

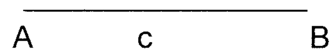


4.) Der Schnittpunkt von Schenkel und Kreisbogen ist der Punkt C. Verbinde ihn mit B.

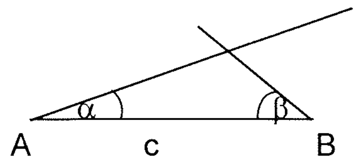


Konstruktion nach WSW (gegeben c, α, β)

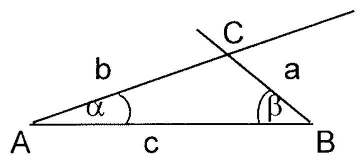
1.) Zeichne die gegebene Seite.



2.) Zeichne die zweiten Schenkel
der gegebenen Winkel α und β.

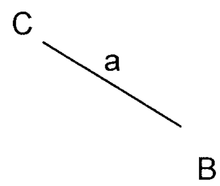


3.) Der Schnittpunkt dieser beiden Schenkel ist C.

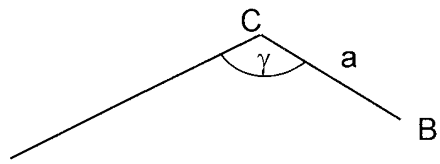


Konstruktion nach SSW (gegeben c, γ, a)

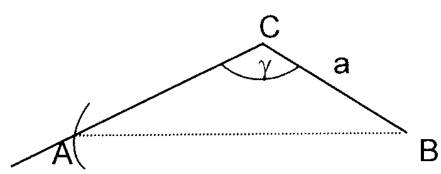
1.) Zeichne die Seite, die am Winkel γ
anliegt (hier also a).



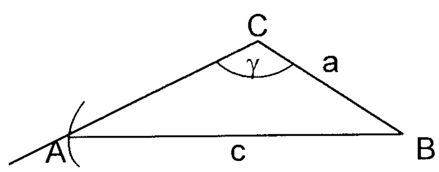
2.) Zeichne den zweiten Schenkel
des gegebenen Winkels γ ein.



3.) Ziehe einen Kreisbogen um B mit
der Länge der zweiten vorgegebenen Seite.



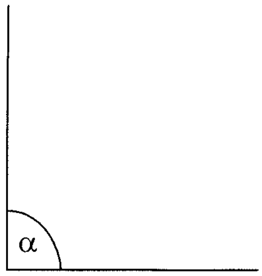
4.) Der Schnittpunkt von Schenkel und
Kreisbogen ist der Punkt A.
Verbinde diesen Punkt mit B.



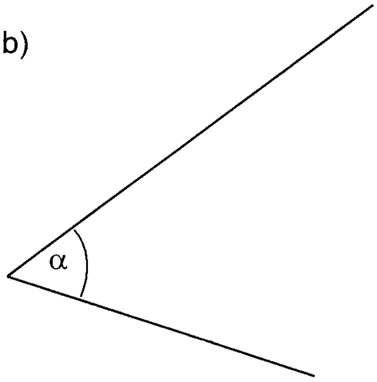
Winkel messen und zeichnen

Miss folgende Winkel!

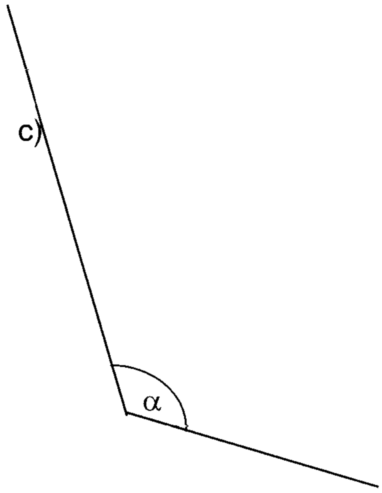
a)



b)



c)



Zeichne folgende Winkel!

a) $\alpha = 35°$ b) $\alpha = 68°$ c) $\alpha = 125°$

Winkelsumme im Dreieck

Berechne den fehlenden Winkel im Dreieck!

a) $\alpha = 23°$ $\beta = 46°$ $\gamma = ?$

b) $\alpha = 25°$ $\beta = ?$ $\gamma = 60°$

c) $\alpha = ?$ $\beta = ?$ $\gamma = 50°$ (gleichschenkliges Dreieck mit $\alpha = \beta$)

Dreieckskonstruktionen

Konstruiere:

a) ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 5 cm.

b) ein rechtwinkliges Dreieck mit $\alpha = 90°$, $\beta = 35°$, $c = 5$ cm.

c) ein gleichschenkliges Dreieck mit $a = b = 3$ cm, $\gamma = 40°$.

d) ein ungleichseitiges Dreieck mit $c = 7$ cm, $\gamma = 114°$, $a = 3$ cm.

e) ein gleichschenkliges und rechtwinkliges Dreieck mit beliebig langen Seiten.

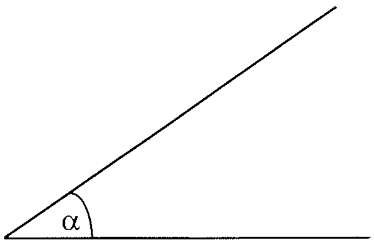
Winkel messen und zeichnen

Miss folgende Winkel!

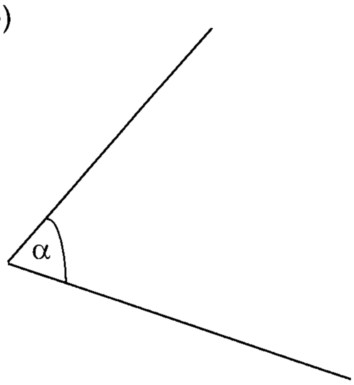
a) $\alpha = 90°$ b) $\alpha = 55°$ c) $\alpha = 123°$

Zeichne folgende Winkel!

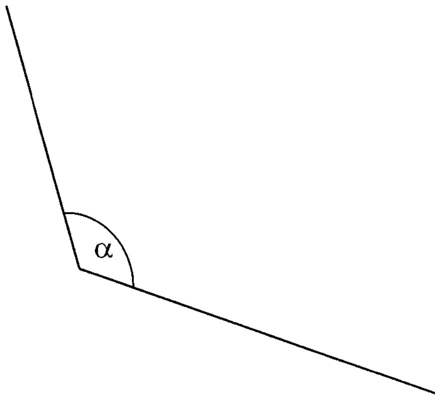
a)



b)



c)

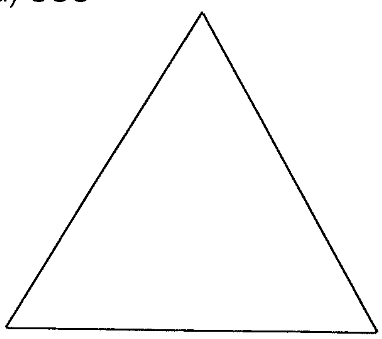


Winkelsumme im Dreieck

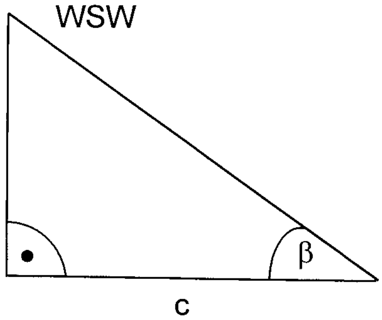
a) $\gamma = 111°$ b) $\beta = 95°$ c) $\alpha = \beta = 65°$

Dreieckskonstruktionen

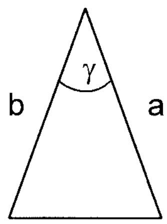
a) SSS



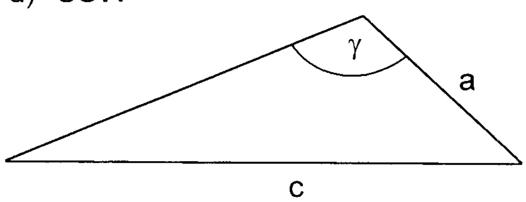
b) WSW



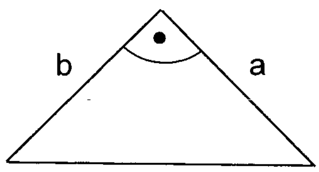
c) SWS



d) SSW



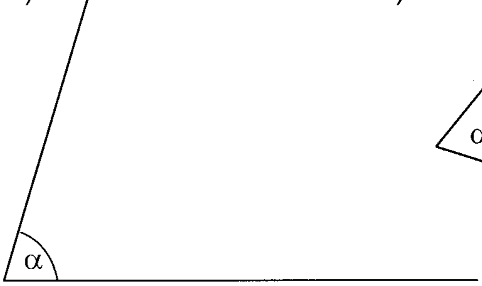
e) SWS, z. B.



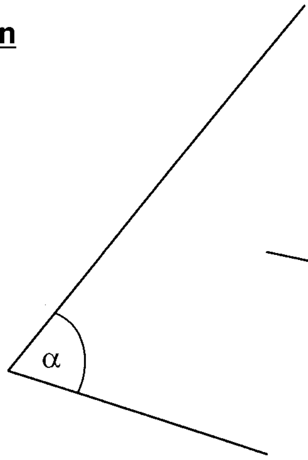
Winkel messen und zeichnen

Miss folgende Winkel!

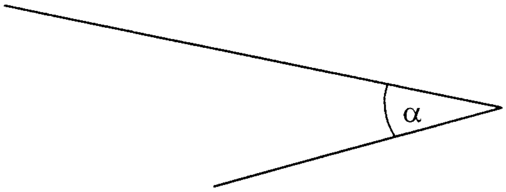
a)



b)



c)



Zeichne folgende Winkel!

a) $\alpha = 170°$ b) $\alpha = 15°$ c) $\alpha = 98°$

Winkelsumme im Dreieck

Berechne den fehlenden Winkel im Dreieck!

a) $\alpha = 56{,}7°$	$\beta = ?$	$\gamma = 23{,}8°$	
b) $\alpha = ?$	$\beta = ?$	$\gamma = 40°$	(gleichschenkliges Dreieck)
c) $\alpha = ?$	$\beta = ?$	$\gamma = 90°$	(gleichschenkliges Dreieck)

Dreieckskonstruktionen

Konstruiere:

a) ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 2,5 cm.

b) ein ungleichseitiges Dreieck mit $\alpha = 27°$, $\beta = 45°$, $c = 4$ cm.

c) ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei C und $a = 4$ cm.

d) ein ungleichseitig stumpfwinkliges Dreieck mit beliebig langen Seiten.

e) Warum gibt es kein gleichseitiges Dreieck mit einem rechten Winkel?

f) Warum gibt es kein gleichseitiges Dreieck mit einem stumpfen Winkel?

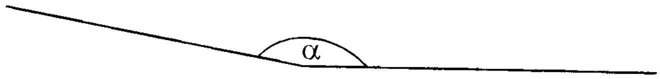
Winkel messen und zeichnen

Miss folgende Winkel!

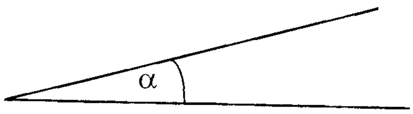
a) $\alpha = 74°$ b) $\alpha = 69°$ c) $\alpha = 27°$

Zeichne folgende Winkel!

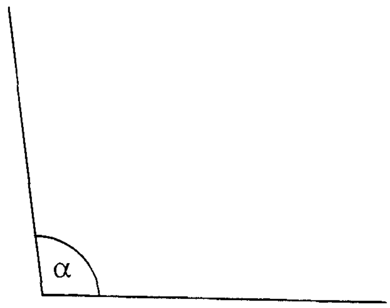
a)



b)



c)

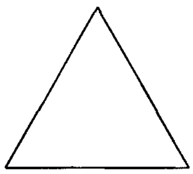


Winkelsumme im Dreieck

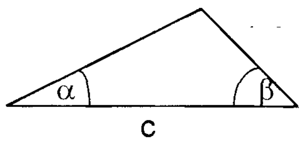
a) $\beta = 99{,}5°$ b) $\alpha = \beta = 70°$ c) $\alpha = \beta = 45°$

Dreieckskonstruktionen

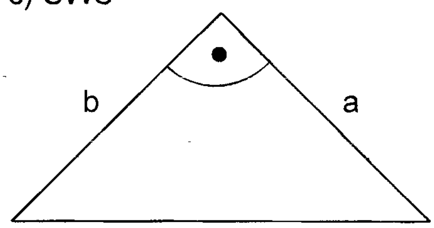
a) SSS



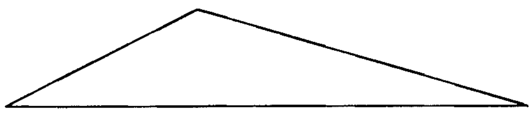
b) WSW



c) SWS



d) z. B.

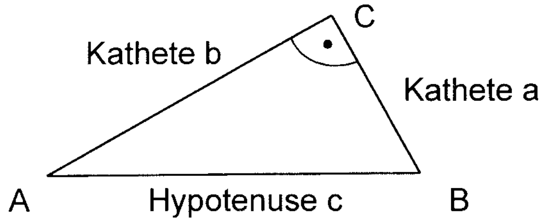


e) In einem gleichseitigen Dreieck sind alle Winkel gleich groß: $\alpha = \beta = \gamma = 60°$. Deswegen kann kein Winkel 90° betragen.

f) siehe Antwort e)

In **rechtwinkligen** Dreiecken haben die Seiten besondere Bezeichnungen:

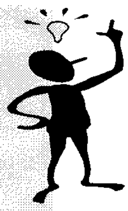
Katheten:	die beiden Seiten, die den rechten Winkel einschließen.
Hypotenuse:	die Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt.



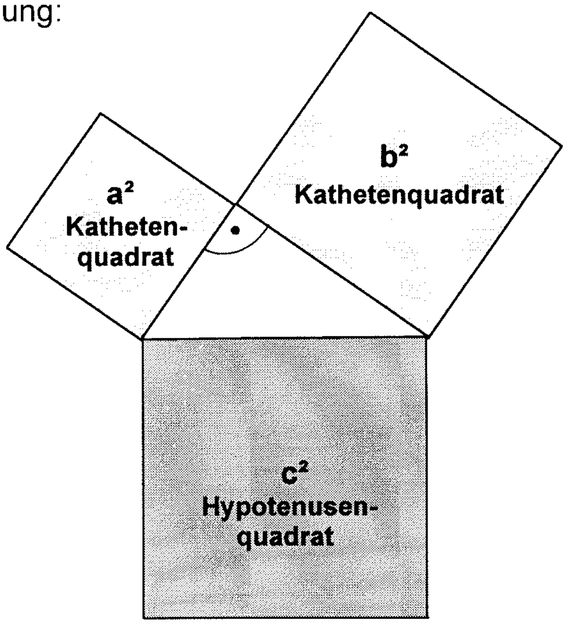
Da in Dreiecken die längste Seite immer dem Winkel mit dem größten Winkelmaß gegenüberliegt, ist im rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse die längste Seite.

Wenn c die Hypotenuse ist, dann gilt in rechtwinkligen Dreiecken:

$a^2 + b^2$	$=$	c^2
Summe der Flächeninhalte der Katheten-quadrate	gleich	dem Flächeninhalt des Hypotenusen-quadrats.



Graphische Darstellung:

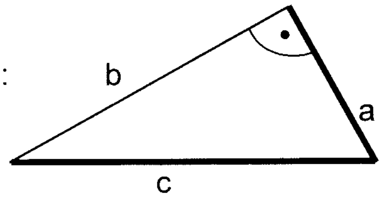


Wenn zwei Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks bekannt sind, dann kann man mit Hilfe des Satzes des Pythagoras die Länge der dritten Seite berechnen:

1. Beispiel:

a = 6cm
c = 8cm
b = ?

Skizze:



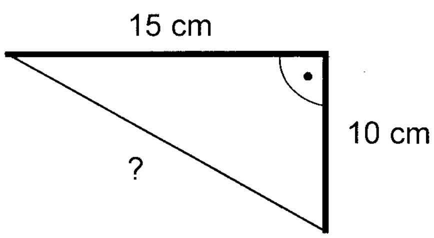
Rechnung:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad | -a^2$$
$$b^2 = c^2 - a^2 \quad | \sqrt{\ }$$
$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$6^2 + b^2 = 8^2$$
$$b^2 = 8^2 - 6^2 \quad | \sqrt{\ }$$
$$b^2 = \sqrt{8^2 - 6^2}$$
$$= \sqrt{64 - 36}$$
$$= \sqrt{28}$$
$$\approx \underline{\underline{5{,}29}}$$

Antwort: b = 5,29 cm.

2. Beispiel:



Berechne die fehlende Seitenlänge!

Überlegung: Die fehlende Seiten liegt dem rechten Winkel gegenüber. Es ist also die Hypotenuse c gesucht.

Rechnung:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad | \sqrt{\ }$$
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$= \sqrt{10^2 + 15^2}$$
$$= \sqrt{100 + 225}$$
$$= \sqrt{325}$$
$$\approx \underline{\underline{18}}$$

Antwort: Die gesuchte Hypotenuse hat eine Länge von 18cm.

WENN NÖTIG, RUNDE BEI DIESEN AUFGABEN SINNVOLL!

Sind die Dreiecke rechtwinklig? Begründe!

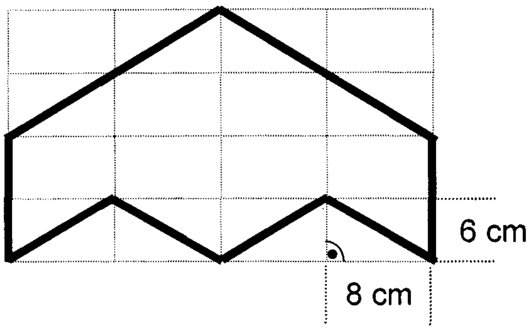
a)	a = 5 cm	b = 6,5 cm	c = 9 cm
b)	a = 30 cm	b = 18 cm	c = 24 cm
c)	a = 5 cm	b = 13 cm	c = 12 cm

Berechne!

a) In einem rechtwinkligen Dreieck sind nur eine Kathete und die Hypotenuse bekannt: a = 6cm, b = 10 cm.
Berechne die Länge der anderen Kathete!

b) Berechne die Länge d der Diagonalen eines Rechtecks mit den Seitenlängen 8 cm und 15 cm.

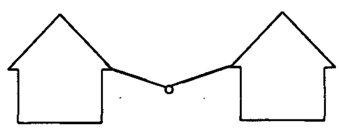
c) Welchen Umfang hat diese Figur?



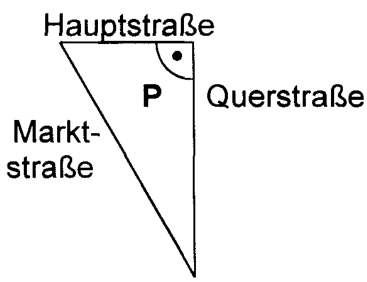
Textaufgaben

a) Ein Dorf hat einen Maibaum aufgestellt. Doch leider hat ihn schon in der ersten Mainacht die Gewalt eines Gewittersturms in einer Höhe von 4 m so abgeknickt, dass seine Spitze den Boden 3 m vom Fuß des Stammes entfernt berührt.
Wie hoch war der Maibaum, als er aufgestellt wurde?

b) Zwischen zwei Häusern, die 16 m voneinander entfernt sind, wird genau in der Mitte eine Straßenlaterne angebracht. Das Stahlseil hängt 75 cm durch.
Wie lang ist das Stahlseil?



c) Neben einem Supermarkt wird ein Parkplatz P angelegt, der die Form eines rechtwinkligen Dreiecks besitzt. Der Parkplatz nimmt an der Hauptstraße 96 m und an der Marktstraße 160 m ein.
Welche Länge hat er an der Querstraße?



WENN NÖTIG, WURDEN DIESE AUFGABEN GERUNDET!

Sind die Dreiecke rechtwinklig? Begründe!

a) nein, denn: $5^2 + 6{,}5^2 \neq 9^2$

b) ja, denn: $18^2 + 24^2 = 30^2$

c) ja, denn: $5^2 + 12^2 = 13^2$

Berechne!

a) Die Länge der Kathete beträgt 8 cm.

b) Die Diagonalen des Rechtecks ist 17 cm lang.

c) Die Figur hat einen Umfang von 104 cm.

Textaufgaben

a) Der Maibaum war 9 m hoch.

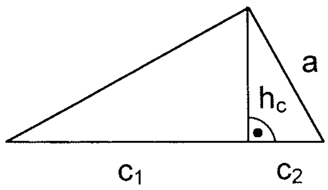
b) Das Seil ist 16,07 m lang.

c) An der Querstraße hat der Parkplatz eine Länge von 128 m.

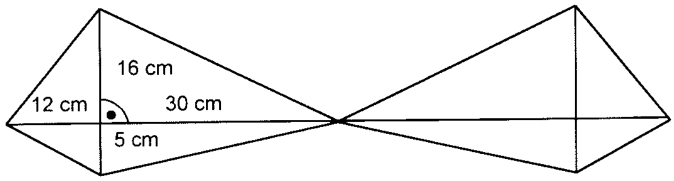
WENN NÖTIG, RUNDE BEI DIESEN AUFGABEN SINNVOLL!

Berechne!

a) In einem Dreieck
sind folgende Längen bekannt:
$a = 7$ cm; $c_1 = 14{,}26$ cm; $h_{c'} = 4$ cm.
Wie lang ist die Seite c mit $c = c_1 + c_2$?



b) Welchen Umfang hat diese symmetrische Figur?



Textaufgaben

a) 12 m entfernt von einer 14 m hohen Fichte verläuft in 6 m Höhe eine Telefonleitung. Die Fichte soll gefällt werden.
Weise nach, dass im ungünstigsten Falle mit einer Gefährdung der Telefonleitung gerechnet werden muss, wenn die Fichte unmittelbar in Höhe des Erdbodens abgesägt wird.
Zeige, dass keine Gefahr für die Telefonleitung besteht, wenn die Fichte 1,3 m über dem Erdboden abgesägt wird.

b) In einer 25 m² großen Quadratfläche sollen die beiden Diagonalen durch einen weißen Farbanstrich kenntlich gemacht werden.
Wie lang sind die weißen Linien zusammen?

c) An einem Sendemast sind in 200 m Höhe drei Stahlseile angebracht, die am Erdboden 160 m entfernt vom Mast verankert sind.
Welche Länge hat ein Seil? Runde auf m!

d) Kann ein 14 cm langer Bleistift auf einer 13 cm langen und 7 cm breiten Deckfläche eines Quaders liegen, ohne überzustehen?

e) Eine Leiter, die an eine Hauswand angelehnt ist, steht am Boden 1,10 m vom Haus entfernt.
Wie hoch reicht die Leiter, wenn sie 5 m lang ist?

WENN NÖTIG, WURDEN DIESE AUFGABEN GERUNDET!

Berechne!

a) Die Seite c ist 20 cm lang.

b) Der Umfang beträgt 194,82 cm.

Textaufgaben

a) Da der Abstand zwischen dem Fuß der Fichte und der Telefonleitung nur 13,41 m beträgt, kann es im ungünstigen Fall passieren, dass der Baum die Telefonleitung trifft.
Wenn die Fichte 1,3 m über dem Erdboden abgesägt wird, ist der Stamm nur noch 12,7 m lang. Der Abstand vom Stumpf zur Telefonleitung beträgt 12,89 m, so dass der Baum die Leitung nicht treffen kann.

b) Die weißen Linien sind zusammen 14,14 m lang.

c) Das Seil hat eine Länge von 161 m.

d) Ja, die Diagonale der Deckfläche ist 14,76 cm lang und somit länger als der Bleistift.

e) Die Leiter reicht 4,88 m hoch.

Längen und Flächen sind Größen. Eine Größe besteht immer aus einer Maßzahl und einer Maßeinheit.

4,25 m — Maßzahl, Maßeinheit

7,28 m² — Maßzahl, Maßeinheit

1. Längen

Die Grundeinheit der Länge ist der Meter (m). Je nach Bedarf kann man eine größere oder kleinere Einheit wählen.

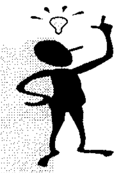
Wichtige Maßeinheiten für Längen sind:

km (Kilometer)
m (Meter)
dm (Dezimeter)
cm (Zentimeter)
mm (Millimeter)

Für die Umrechnung der Längenmaße gelten folgende Beziehungen:

$$
\begin{tikzcd}
km \arrow[r, bend left, "\cdot 1000"] & m \arrow[l, bend left, ": 1000"] \arrow[r, bend left, "\cdot 10"] & dm \arrow[l, bend left, ": 10"] \arrow[r, bend left, "\cdot 10"] & cm \arrow[l, bend left, ": 10"] \arrow[r, bend left, "\cdot 10"] & mm \arrow[l, bend left, ": 10"]
\end{tikzcd}
$$

Um von einer Einheit in die nächstgrößere (nächstkleinere) Einheit umzurechnen, muß man die Maßzahlen durch 10 dividieren (multiplizieren).
Ausnahme: Bei der Umwandlung von km in m muß man die Maßzahl mit 1000 multiplizieren, von m in km durch 1000 dividieren.



1 km = 1000 m 1 m = 10 dm 1 dm = 10 cm 1 cm = 10 mm	1 mm = 0,1 cm 1 cm = 0,1 dm 1 dm = 0,1 m 1 m = 0,001 km

Wenn man Längenmaße addiert oder subtrahiert, muß man vorher alle Maße in dieselbe Einheit umwandeln.

Beispiel: Ein Schüler fährt jeden Morgen 650 m mit dem Fahrrad zur Schule und mittags wieder zurück. Am Wochenende macht er eine Fahrradtour über 35 km. Wie viele km hat er in der Woche mit dem Fahrrad zurückgelegt?

Überlegung: 5 Tage je 2 Fahrten à 650 m ⇒ 10 Fahrten à 650 m
Rechnung: $10 \cdot 650 = 6500$
Umrechnung: 6500 m = 6,5 km
Rechnung: $6{,}5 + 35 = 41{,}5$

Antwort: Er fährt mit dem Fahrrad 41,5 km in der Woche.

2. Umfang

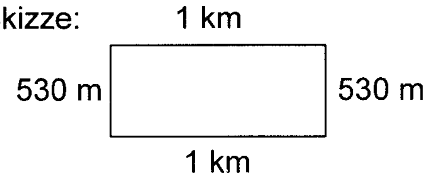
Der Umfang (U) einer Fläche ist die Summe aller Seitenlängen. Die Einheit des Umfanges ist also dieselbe wie die der Seitenlängen.

Wenn man Längenmaße addiert oder subtrahiert, muß man vorher alle Maße in dieselbe Einheit umwandeln.

Beispiel: Ein Feld ist 1 km lang und 530 m breit. Wie lang ist ein Zaun, der das Feld abgrenzt?

Überlegung: Der Umfang des Feldes muss berechnet werden.

Skizze:



Formel: U = a + b + a + b

Umrechnung: 1 km = 1000 m

Rechnung: U = 1000 + 530 + 1000 + 530
= 3060

Umrechnung: 3060 m = 3,060 km = $\underline{\underline{3{,}06\text{ km}}}$

Antwort: Der Zaun ist 3,06 km lang.

3. Flächeninhalt

Die Größe der Fläche einer Figur wird mit Flächeninhalt (A) bezeichnet. Die Grundeinheit für Flächeninhalte ist der Quadratmeter (m^2).

Wichtige Maßeinheiten für Flächeninhalte sind:

km^2	(Quadratkilometer)
ha	(Hektar)
a	(Ar)
m^2	(Quadratmeter)
dm^2	(Quadratdezimeter)
cm^2	(Quadratzentimeter)
mm^2	(Quadratmillimeter)

1 m^2 entspricht dem Flächeninhalt eines Quadrates mit der Seitenlänge 1 m.
1 dm^2 entspricht dem Flächeninhalt eines Quadrates mit der Seitenlänge 1 dm.

Für die Umrechnung der Flächenmaße gelten folgende Beziehungen:

$$\begin{tikzcd}
km^2 \arrow[r, bend left, "\cdot 100"] & ha \arrow[l, bend left, ": 100"] \arrow[r, bend left, "\cdot 100"] & a \arrow[l, bend left, ": 100"] \arrow[r, bend left, "\cdot 100"] & m^2 \arrow[l, bend left, ": 100"] \arrow[r, bend left, "\cdot 100"] & dm^2 \arrow[l, bend left, ": 100"] \arrow[r, bend left, "\cdot 100"] & cm^2 \arrow[l, bend left, ": 100"] \arrow[r, bend left, "\cdot 100"] & mm^2 \arrow[l, bend left, ": 100"]
\end{tikzcd}$$

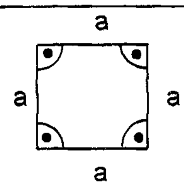
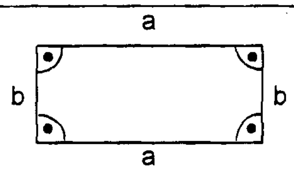
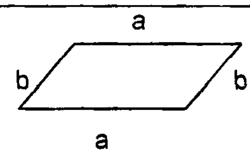
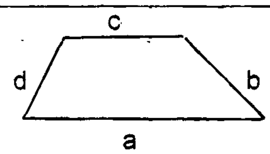
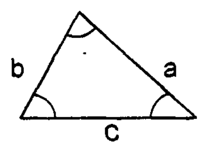
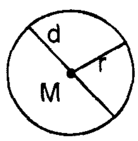
Um von einer Einheit in die nächstgrößere (nächstkleinere) Einheit umzurechnen, muß man die Maßzahlen durch 100 dividieren (multiplizieren).

$1\ km^2 = 100\ ha$
$1\ ha = 100\ a$
$1\ a = 100\ m^2$
$1\ m^2 = 100\ dm^2$
$1\ dm^2 = 100\ cm^2$
$1\ cm^2 = 100\ mm^2$

$1\ mm^2 = 0{,}01\ cm^2$
$1\ cm^2 = 0{,}01\ dm^2$
$1\ dm^2 = 0{,}01\ m^2$
$1\ m^2 = 0{,}01\ a$
$1\ a = 0{,}01\ ha$
$1\ ha = 0{,}01\ km^2$

Wenn man Flächenmaße addiert oder subtrahiert, muß man vorher alle Maße in dieselbe Einheit umwandeln.

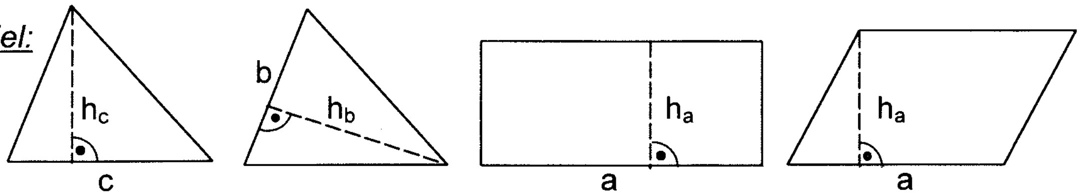
3.1. Eigenschaften von verschiedenen Flächen

Fläche	Eigenschaften	Skizze
Quadrat	- vier gleich lange Seiten - vier rechte Winkel - zwei Paare paralleler Seiten	
Rechteck	- vier Seiten: die gegenüberliegenden sind jeweils gleich lang - vier rechte Winkel - zwei Paare paralleler Seiten	
Parallelogramm	- vier Seiten: die gegenüberliegenden Seiten sind jeweils gleich lang - zwei Paare paralleler Seiten	
Trapez	- vier Seiten, von denen zwei parallel sind	
Dreieck	- drei Seiten - drei Winkel	
Kreis	- Radius (r): Strecke vom Mittelpunkt (M) zu einem Punkt des Kreises. - Durchmesser (d): Strecke durch M, die zwei Punkte des Kreises miteinander verbindet. $d = 2 \cdot r$	

3.2. Die Höhen von Flächen

Die Höhe einer Fläche wird immer im rechten Winkel zu der Grundseite der Höhe gemessen.

Beispiel:

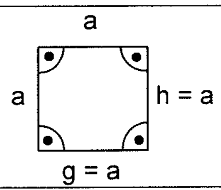
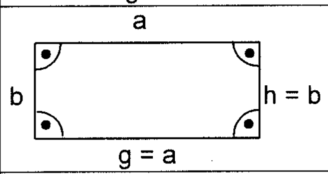
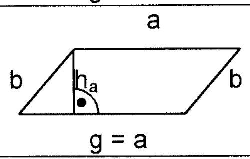
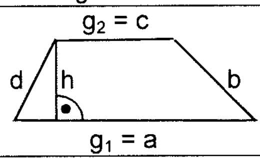
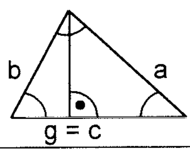
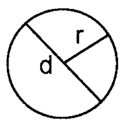


3.3. Formeln für die Berechnung von Umfang und Flächeninhalt

Grundsätzlich gilt für die Berechnung der Flächeninhalte (Ausnahme: Kreis):

A = Grundseite · dazugehörige Höhe (allg. $A = g \cdot h$) bzw.

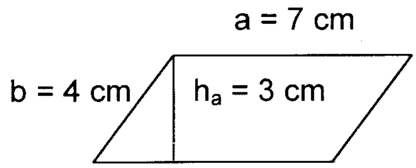
$A = \frac{1}{2}$ · Grundseite · dazugehörige Höhe (allg. $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$)

Fläche	Skizze	Umfangsformel	Flächeninhaltsformel
Quadrat		$U = a + a + a + a$ $= 4a$	$A = g \cdot h$ $= a \cdot a$ $= a^2$
Rechteck		$U = a + b + a + b$ $= 2a + 2b$	$A = g \cdot h$ $= a \cdot b$
Parallelogramm		$U = a + b + a + b$ $= 2a + 2b$	$A = g \cdot h$ $= a \cdot h_a$
Trapez		$U = a + b + c + d$	$A = \frac{1}{2} \cdot (g_1 + g_2) \cdot h$ $= \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$
Dreieck		$U = a + b + c$	$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$ $= \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$
Kreis		$U = 2 \cdot \pi \cdot r$	$A = \pi \cdot r^2$

1. Beispiel:

Welchen Umfang und welchen Flächeninhalt hat ein Parallelogramm, dessen eine Seite 7 cm und dessen andere 4 cm lang ist? Die zu der 7 cm langen Seite gehörende Höhe ist 3 cm lang.

Skizze:



Formeln: $U = 2a + 2b$ $A = g \cdot h$

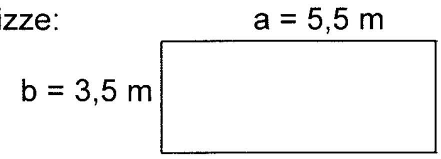
Rechnungen: $U = 2 \cdot 7 + 2 \cdot 4 = \underline{\underline{22}}$ $A = 7 \cdot 3 = \underline{\underline{21}}$

Antwort: Der Umfang des Parallelogramms beträgt 22 cm.
Der Flächeninhalt beträgt 21 cm².

2. Beispiel:

Karina möchte sich für ihr Zimmer einen neuen Teppich und neue Fußleisten kaufen. Ihr Zimmer ist 3,5 m breit und 5,5 m lang. Wie viel Meter Fußleisten und wie viel Quadratmeter Teppich muss sie kaufen?

Skizze:



Formeln: $U = 2a + 2b$ $A = g \cdot h$

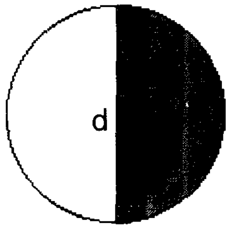
Rechnungen: $U = 2 \cdot 5{,}5 + 2 \cdot 3{,}5 = \underline{\underline{18}}$ $A = 5{,}5 \cdot 3{,}5 = \underline{\underline{19{,}25}}$

Antwort: Karina muss 18 m Fußleisten kaufen und 19,25 m² Teppich.

3. Beispiel:

Berechne den Umfang und den Flächeninhalt der dunklen Fläche mit d = 5 cm.

Skizze:



Überlegung: Die dunkle Fläche ist ein Halbkreis. Also ist der Umfang die Hälfte des Umfanges eines Vollkreises plus der Länge des Durchmessers. Der Flächeninhalt ist die Hälfte der ganzen Kreisfläche.

Formeln: $U = \frac{1}{2} \cdot (\pi \cdot d) + d$ $A = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2$

Rechnungen: $U = \frac{1}{2} \cdot (\pi \cdot 5) + 5$ $A = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2{,}5^2$

$\approx \underline{\underline{12{,}85}}$ $\approx \underline{\underline{9{,}82}}$

Antwort: Die dunkle Fläche hat einen Umfang von 12,85 cm und einen Flächeninhalt von 9,82 cm².

WENN NÖTIG, RUNDE BEI DIESEN AUFGABEN SINNVOLL!

Umrechnung von Längen- und Flächeneinheiten

Rechne in die nächstgrößere Einheit um!

a) 47,4 cm b) 564 m c) 9128 dm² d) 25487 a

Rechne in die nächstkleinere Einheit um!

a) 5,978 km b) 25,43 dm c) 4,921 ha d) 2,98 km²

Was ist größer?

a) 5,6 km oder 3859 m b) 2,12 cm oder 234 mm

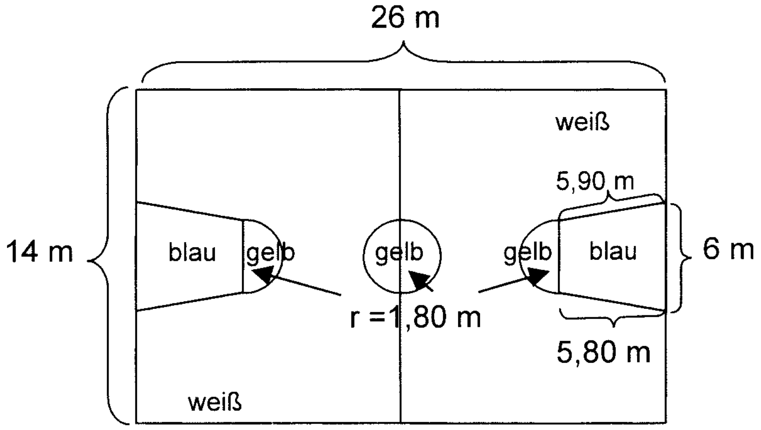
c) 47,9 m² oder 4,78 a d) 58,8 cm² oder 58 cm² 6 mm²

Textaufgaben

a) Welchen Flächeninhalt hat ein Quadrat, dessen Seite 5,5 cm lang sind?

b) Welchen Umfang hat ein Parallelogramm, dessen eine Seite 7 cm und dessen andere Seite 5,4 cm lang ist?

c) In einem Basketballfeld wird der Boden neu verlegt. Die verschiedenen Spielfeldteile sollen unterschiedliche Farben bekommen.
Wie viel m² des gelben, blauen und weißen Belags werden benötigt?
Sämtliche Linien des Feldes werden mit schwarzem Klebeband umrahmt.
Wie viel m Klebeband wird benötigt?



WENN NÖTIG, WURDEN DIESE AUFGABEN GERUNDET!

Umrechnung von Längen- und Flächeneinheiten

Rechne in die nächstgrößere Einheit um!

a) 4,74 dm	b) 0,564 km	c) 91,28 m²	d) 254,87 ha

Rechne in die nächstkleinere Einheit um!

a) 5978 m	b) 254,3 cm	c) 492,1 a	d) 298 ha

Was ist größer?

a) 5,6 km	$>$	3859 m	b) 2,12 cm	$<$	234 mm
c) 47,9 m²	$<$	4,78 a	d) 58,8 cm²	$>$	58 cm² 6 mm²

Textaufgaben

a) Der Flächeninhalt beträgt 30,25 cm².

b) Das Parallelogramm hat einen Umfang von 24,8 cm.

c) Folgende Mengen des Belags werden gebraucht:
blau: 55,68 m²
gelb: 20,35 m²
weiß: 287,97 m²

Es werden 147,42 m Klebeband benötigt, davon
80 m für die Umrandung des gesamten Feldes,
14 m für die Mittellinie,
22,62 m für die Kreise und
30,80 m für die Trapeze ohne Grundseite (wird von der Außenumrandung abgedeckt).

WENN NÖTIG, RUNDE BEI DIESEN AUFGABEN SINNVOLL!

Umrechnung von Längen- und Flächenmaßen

Rechne in die nächstgrößere Einheit um!

a) 230 cm²	b) 36,85 dm	c) 5900 a	d) 45,68 mm

Rechne in die nächstkleinere Einheit um!

a) 2,9 km²	b) 56,87 km	c) 0,79 ha	d) 7,98 dm

Ordne nach der Größe! Beginne mit der kleinsten Größe!

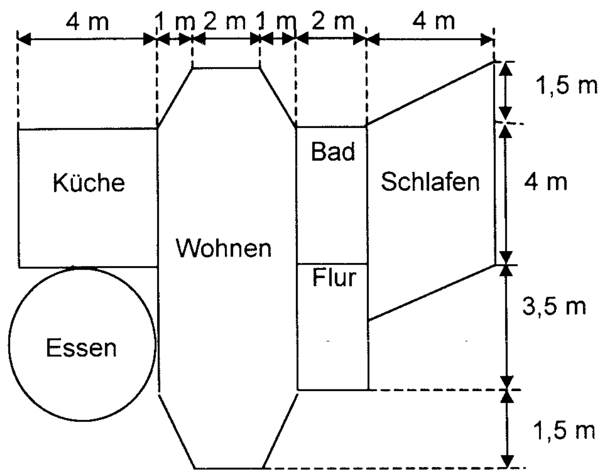
a) 5,89 cm;	0,05 m;	530 m
b) 4,67 ha;	490 a;	430 a 234 m²
c) 52 cm²;	4478 mm²;	0,53 dm²
d) 7,202 km;	6967 m;	7,1 km 301 m

Textaufgaben

a) Welchen Flächeninhalt hat ein Parallelogramm, dessen eine Seite 56 mm lang ist? Die dazugehörige Höhe ist 5,4 cm lang.

b) Welchen Umfang und welchen Flächeninhalt hat ein Dreieck, wenn die Seite a = 34 mm, die Seite b = 6,7 cm, die Seite c = 5 cm sowie die Höhe zur Seite a h_a = 4,5 cm lang sind?

c) Das Esszimmer, der Flur, das Bad und die Küche des Hauses mit dem unten aufgezeichneten Grundriss werden mit Fließen ausgelegt. Wohnzimmer und Schlafzimmer werden mit Teppich ausgelegt.
Wie viel m² Fliesen und Teppich müssen gekauft werden?



WENN NÖTIG, WURDEN DIESE AUFGABEN GERUNDET!

Umrechnung von Längen- und Flächenmaßen

Rechne in die nächstgrößere Einheit um!

a) 2,30 dm² b) 3,685 m c) 59 ha d) 4,568 cm

Rechne in die nächstkleinere Einheit um!

a) 290 ha b) 56870 m c) 79 a d) 79,8 cm

Ordne nach der Größe! Beginne mit der kleinsten Größe!

a) 0,005m	<	5,89 cm	<	530 m
b) 430 a 234 m²	<	4,67 ha	<	490 a
c) 4478 mm²	<	52 cm²	<	0,53 dm²
d) 6967 m	<	7,202 km	<	7,1 km 301 m

Textaufgaben

a) Das Parallelogramm hat einen Flächeninhalt von 3024 mm² (= 30,24 cm²).

b) Der Umfang beträgt 15,1 cm, der Flächeninhalt 7,65 cm².

c) Die Flächen der einzelnen Zimmer betragen:
Esszimmer: 12,57 m², Flur: 7 m², Bad: 8 m², Küche: 16 m²,
Wohnzimmer: 39 m², Schlafzimmer: 22 m²
Es müssen 43,57 m² Fliesen und 61 m² Teppich gekauft werden.

Wenn in diesem Kapitel Probleme auftreten, bitte erst das Kapitel Längen- und Flächenberechnung bearbeiten.

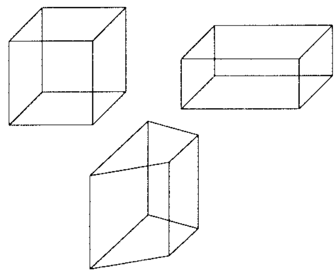
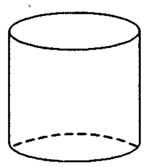
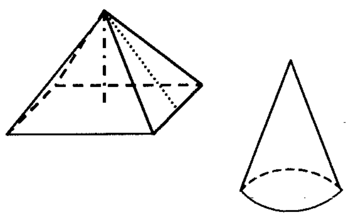
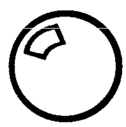
Flächen und Volumen sind Größen. Eine Größe besteht immer aus einer Maßzahl und einer Maßeinheit.

6,39 m² → Maßzahl: 6,39, Maßeinheit: m²

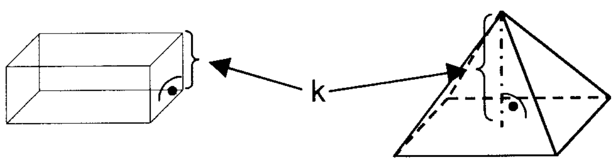
5,83 m³ → Maßzahl: 5,83, Maßeinheit: m³

1. Körper

Grundsätzlich lassen sich Körper in vier Gruppen einteilen:

Körper	Eigenschaften	Skizze
Prismen	- Grund- und Deckfläche sind parallele und deckungsgleiche n-Ecke ($n \geq 3$), das heisst G = D - Seitenflächen stehen senkrecht zu G	
Zylinder	- Grund- und Deckfläche sind parallele und deckungsgleiche Kreisflächen, das heisst G = D	
Spitzkörper	- laufen nach oben spitz zu und haben somit keine Deckfläche	
Kugel	- Alle Punkte, die auf der Kugeloberfläche liegen, haben die gleiche Entfernung vom Mittelpunkt der Kugel.	

Die Körperhöhe (k) wird immer im rechten Winkel zu der Grundfläche gemessen.

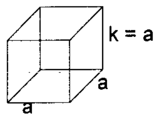
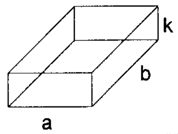
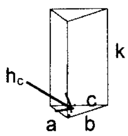
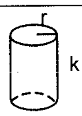
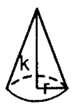
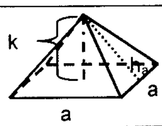


2. Oberflächenberechnung

Die **Oberfläche** (O) eines Körpers (ausgenommen: Kugel) ist die Summe verschiedener Flächen:

Grundfläche (G) + Deckfläche (D) + Seitenflächen = Oberfläche (O)

Die Summe der Seitenflächen wird als **Mantelfläche** (M) bezeichnet.

Körper		Skizze	Mantelflächenformel	Oberflächenformel
Prisma	Würfel (Prisma mit quadratischer Grundfläche)		$M = 4a \cdot k$ $= 4a \cdot a$ $= 4a^2$	$O = 2G + M$ $= 2\,a^2 + 4\,a^2$ $= 6a^2$
	Quader (Prisma mit rechteckiger Grundfläche)		$M = (a + b + a + b) \cdot k$ $= (2a + 2b) \cdot k$	$O = 2G + M$ $= 2ab + (2a + 2b) \cdot k$
	bel. Prisma (hier: mit dreieckiger Grundfläche)		$M = (a + b + c) \cdot k$	$O = 2G + M$ $= 2\,(\frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c) +$ $(a + b + c) \cdot k$ $= c \cdot h_c + (a+b+c) \cdot k$
Zylinder			$M = (2\pi r) \cdot k$	$O = 2G + M$ $= 2 \cdot (\pi r^2) + (2\pi r) \cdot k$
Spitz-körper	Kegel		$M = \pi r\, s$ (mit s = Seitenkante)	$O = G + M$ $= \pi r^2 + \pi r\, s$
	Quadratische Pyramide		$M = 4 \cdot (\frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a)$ $= 2 \cdot a \cdot h_a$	$O = G + M$ $= a^2 + 2 \cdot a \cdot h_a$
Kugel			Gibt es nicht!!!	$O = 4\pi r^2$

3. Volumenberechnung

Die Grundeinheit des Volumens (V) ist der Kubikmeter (m^3). Je nach Bedarf kann man die Grundeinheit oder eine kleinere Einheit wählen.

Wichtige Maßeinheiten für Volumen sind:

m^3	(Kubikmeter)
dm^3	(Kubikdezimeter)
cm^3	(Kubikzentimeter)
mm^3	(Kubikmillimeter)

Für die Umrechnung der Volumenmaße gelten folgende Beziehungen:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
m^3 \arrow[r, bend left, "\cdot\ 1000"] & dm^3 \arrow[l, bend left, ":\ 1000"] \arrow[r, bend left, "\cdot\ 1000"] & cm^3 \arrow[l, bend left, ":\ 1000"] \arrow[r, bend left, "\cdot\ 1000"] & mm^3 \arrow[l, bend left, ":\ 1000"]
\end{tikzcd}
$$

Um von einer Einheit in die nächstgrößere (nächstkleinere) Einheit umzurechnen, muß man die Maßzahlen durch 1000 dividieren (multiplizieren).

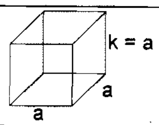
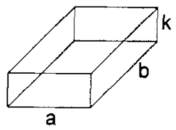
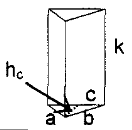
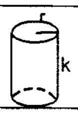
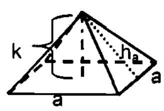
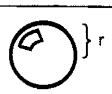
1 m³ = 1000 dm³ 1 dm³ = 1000 cm³ 1 cm³ = 1000 mm³	1 mm³ = 0,001 cm³ 1 cm³ = 0,001 dm³ 1 dm³ = 0,001 m³

Wenn man Volumenmaße addiert oder subtrahiert, muß man vorher alle Maße in dieselbe Einheit umwandeln.

Grundsätzlich gilt für die Volumenberechnung (Ausnahme: Kugel):

Grundfläche $\cdot$ Körperhöhe (allg. $V = G \cdot k$) bzw.

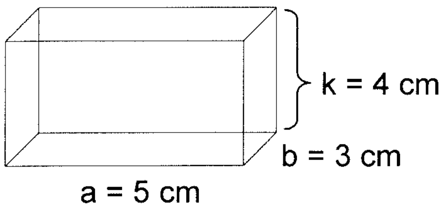
$\frac{1}{3} \cdot$ Grundfläche $\cdot$ Körperhöhe (allg. $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot k$)

Körper		**Skizze**	**Volumenformel**
Prisma	Würfel (Prisma mit quadratischer Grundfläche)		$V = G \cdot k$ $= a^2 \cdot a$ $= a^3$
	Quader (Prisma mit rechteckiger Grundfläche)		$V = G \cdot k$ $= ab \cdot k$
	bel. Prisma (hier: mit dreieckiger Grundfläche)		$V = G \cdot k$ $= (\frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a) \cdot k$
Zylinder			$V = G \cdot k$ $= \pi r^2 \cdot k$
Spitz-körper	Kegel		$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot k$ $= \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot k$
	Quadratische Pyramide		$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot k$ $= \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot k$
Kugel			$V = \frac{4}{3} \pi r^3$

1. Beispiel:

Gegeben ist ein Quader mit a = 5 cm, b = 3 cm und der Körperhöhe k = 4 cm.
Berechne die Mantel- und Oberfläche und das Volumen des Körpers!

Skizze:



Formeln:

$M = (2a + 2b) \cdot k$ $\qquad O = 2G + M = 2ab + M$ $\qquad V = G \cdot k = ab \cdot k$

Rechnungen:

$M = (2 \cdot 5 + 2 \cdot 3) \cdot 4 = \underline{\underline{64}}$

$O = 2 \cdot 5 \cdot 3 + 64 = \underline{\underline{94}}$

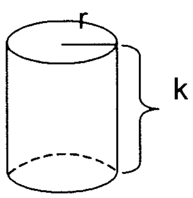
$V = 5 \cdot 3 \cdot 4 = \underline{\underline{60}}$

Antwort: Die Mantelfläche des Quaders beträgt 64 cm^2, die Oberfläche 94 cm^2 und sein Volumen 60 cm^3.

2. Beispiel:

Ein Zylinder hat einen Radius von r = 2,5 cm und eine Körperhöhe k = 20 cm.
Berechne die Mantel- und Oberfläche sowie das Volumen!

Skizze:



Formeln:

$M = (2\pi r) \cdot k$ $\qquad O = 2G + M = 2\pi r^2 + M$ $\qquad V = G \cdot k = \pi r^2 \cdot k$

Rechnungen:

$M = (2\pi \cdot 2{,}5) \cdot 20 \approx \underline{\underline{314{,}16}}$

$O = 2\pi \cdot (2{,}5)^2 + 314{,}16 \approx \underline{\underline{353{,}43}}$

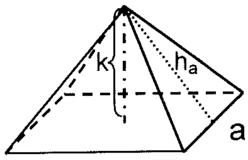
$V = \pi \cdot (2{,}5)^2 \cdot 20 \approx \underline{\underline{392{,}63}}$

Antwort: Die Mantelfläche des Körpers beträgt 314,16 cm^2, die Oberfläche 353,43 cm^2 und sein Volumen 392,63 cm^3.

3. Beispiel:

Die Cheopspyramide in Ägypten hat eine quadratische Grundfläche mit einer Kantenlänge a = 230 m, der Seitenhöhe h_a = 186 m und der Körperhöhe k = 146 m. Berechne die Mantel- und Oberfläche und das Volumen!

Skizze:



Formeln:

$M = 2 \cdot a \cdot h_a$ $O = G + M = a^2 + M$ $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot k = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot k$

Rechnungen:

$M = 2 \cdot 230 \cdot 186 = \underline{\underline{85560}}$

$O = (230)^2 + 85560 = \underline{\underline{138460}}$

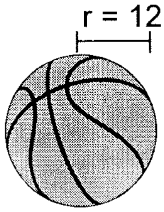
$V = \frac{1}{3} \cdot (230)^2 \cdot 146 = \underline{\underline{2574466{,}6}}$

Antwort: Die Mantelfläche des Körpers beträgt 85560 m², die Oberfläche 138460 m² und sein Volumen 2574466,6 m³.

4. Beispiel:

Ein Basketball hat einen Radius von 12,5 cm. Berechne, wie viel Leder zur Herstellung eines Basketballes benötigt werden und wie groß sein Volumen ist.

Skizze:



Formeln:

$O = 4\pi r^2$ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Rechnungen:

$O = 4\pi \cdot (12{,}5)^2 \approx \underline{\underline{1963{,}5 = 1964}}$

$V = \frac{4}{3}\pi \cdot (12{,}5)^3 \approx \underline{\underline{8179{,}69}}$

Antwort: Es werden 1964 cm² Leder benötigt. Das Volumen des Balles beträgt 8179,69 cm³.

WENN NÖTIG, RUNDE BEI DIESEN AUFGABEN SINNVOLL!

Umrechnung von Volumeneinheiten

Rechne um in die angegebene Einheit!

a) 5600 mm³ (cm³) b) 28 m³ (dm³) c) 202 cm³ (mm³)

d) 726000 mm³ (cm³) e) 345 dm³ (m³) f) 37 dm³ (cm³)

Welche Angabe ist größer?

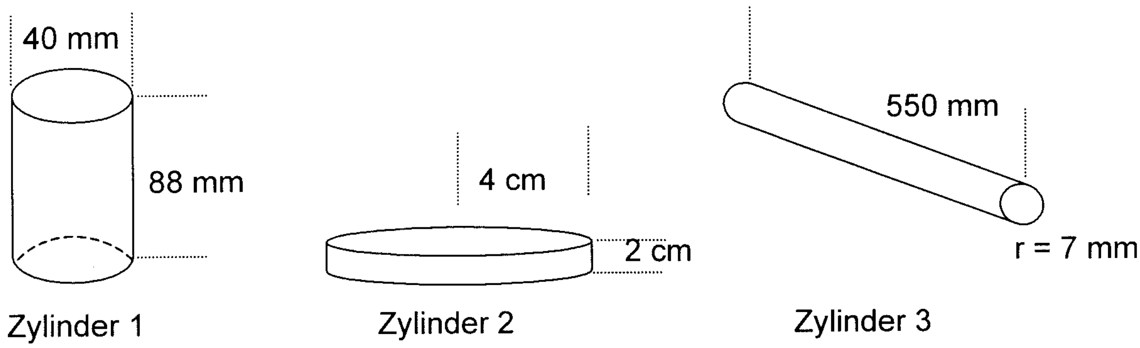
a) 36 dm³ oder 350000 mm³

b) 1,68 m³ oder 1650 dm³ +3300 cm³

c) 0,75 m³ oder 755 dm³

d) 8572 mm³ oder 85,72 dm³

Ordne die folgenden Zylinder nach ihrem Volumen und nach ihrer Oberfläche!



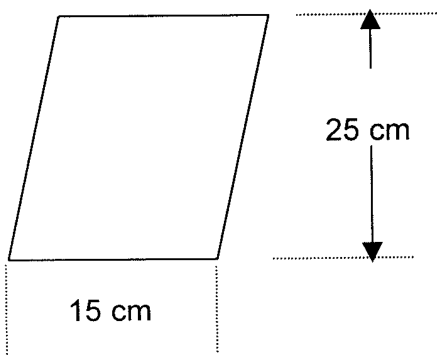
Textaufgaben

a) Bei einer Pyramide hat die quadratische Grundfläche eine Seitenlänge von a = 15 cm. Die Körperhöhe der Pyramide beträgt k = 18 cm. Wie groß ist das Volumen?

b) Berechne Grund-, Mantel- und Oberfläche sowie Volumen von einem Prisma mit dreieckiger Grundfläche mit a = 7 m; b = 10 m; c = 2 m; h_b = 2,2 m; k = 3 m.

c) Es soll ein Schwimmbecken von 50 m Länge, 20 m Breite und 2 m Tiefe gebaut werden.
Wie groß ist die Fläche, auf die Kacheln geklebt werden müssen?
Wie viel m³ Wasser werden für die Füllung maximal gebraucht?

d) Berechne das Volumen des Körpers mit folgender Grundfläche und der Körperhöhe k = 150 cm!



WENN NÖTIG, WURDEN DIESE AUFGABEN GERUNDET!

Umrechnung von Volumeneinheiten

Rechne um in die angegebene Einheit!

a) 5,6 cm^3 b) 28000 dm^3 c) 202000 mm^3

d) 726 cm^3 e) 0,345 m^3 f) 37000 cm^3

Welche Angabe ist größer?

a) 36 dm^3 $>$ 350000 mm^3

b) 1,68 m^3 $>$ 1650 dm^3 + 3300 cm^3

c) 0,75 m^3 $<$ 755 dm^3

d) 8572 mm^3 $<$ 85,72 dm^3

Ordne die folgenden Zylinder nach ihrem Volumen und nach ihrer Oberfläche!

Oberfläche:	Zylinder 3:	244,98 cm^2	Volumen: Zylinder 1:	110,58 cm^3
	Zylinder 2:	150,80 cm^2	Zylinder 2:	100,53 cm^3
	Zylinder 1:	135,72 cm^2	Zylinder 3:	84,67 cm^3

Textaufgaben

a) Das Volumen beträgt 1350 cm^3.

b) Die Grundfläche ist 11 m^2, die Mantelfläche 57 m^2 und die Oberfläche 79 m^2 groß. Das Volumen beträgt 33 m^3.

c) Die Kacheln müssen auf eine Fläche von 1280 m^2 geklebt werden. In das Becken können maximal 2000 m^3 Wasser gefüllt werden.

d) Das Volumen des Körpers beträgt 56250 cm^3 (= 56,25 dm^3).

WENN NÖTIG, RUNDE BEI DIESEN AUFGABEN SINNVOLL!

Umrechnung von Volumeneinheiten

Rechne in die angegebene Einheit um!

a) 1800 mm^3 (cm^3) b) 2,48 m^3 (dm^3) c) 480 cm^3 (mm^3)

d) 1850023 cm^3 (dm^3) e) 17459 dm^3 (m^3) f) 2,5 dm^3 (cm^3)

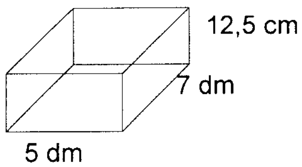
Ordne nach der Größe! Beginne mit der kleinsten Größe!

a) 3 dm^3; 410 cm^3; 0,25 m^3

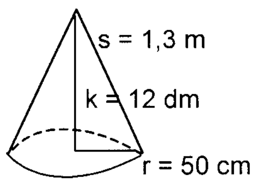
b) 4 cm^3 30 mm^3; 3 cm^3 110 mm^3; 3 cm^3 1310 mm^3

c) 1225 mm^3; 0,456 cm^3; 0,0011 dm^3

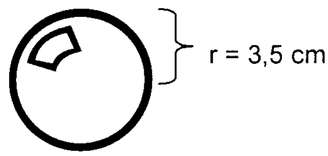
Ordne folgende Körper nach der Größe ihres Volumens und ihrer Oberfläche!



Quader



Kegel



Kugel

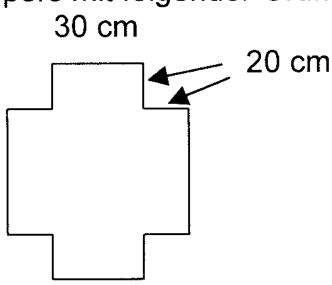
Textaufgaben

a) Bei einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche beträgt das Volumen 4050 cm^3. Die Körperhöhe der Pyramide beträgt k = 18 cm.
Berechne die Seitenlänge der Grundfläche!

b) Für ein Prisma mit trapezförmiger Grundfläche sind folgende Maße angegeben:
Seitenlängen der parallelen seiten der Grundfläche: 12 cm und 18 dm
Seitenlänge der nicht parallelen Seiten der Grundfläche: 8 cm und 9,5 cm
Seitenhöhe der Grundfläche: 0,4 dm
Körperhöhe des Prismas: 17 dm
Berechne die Grund-, Mantel-, Oberfläche und das Volumen!

c) Ein quaderförmiges Schwimmbecken ist 50 m lang und 2,5 m tief.
Wie breit ist das Becken, wenn es ein Volumen von 3125 m^3 beträgt?
Wie hoch steht das Wasser, wenn 2250 m^3 in dem Becken sind?

d) Berechne das Volumen des Körpers mit folgender Grundfläche und der Körperhöhe k = 150 cm!



WENN NÖTIG, WURDEN DIESE AUFGABEN GERUNDET!

Umrechnung von Volumeneinheiten

Rechne in die angegebene Einheit um!

a) 1,8 cm³	b) 2480 dm³	c) 480000 mm³
d) 1850,023 dm³	e) 17,459 m³	f) 2500 cm³

Ordne nach der Größe! Beginne mit der kleinsten Größe!

a) 410 cm³	<	3 dm³	<	0,25 m³
b) 3 cm³ 110 mm³	<	4 cm³ 30 mm³	<	3 cm³ 1310 mm³
c) 0,456 cm³	<	0,0011 dm³	<	1225 mm³

Ordne folgende Körper nach der Größe ihres Volumens und ihrer Oberfläche!

Oberfläche:			Volumen:		
	Kegel:	282,74 dm²		Kegel:	314,16 dm³
	Quader:	100 dm²		Quader:	43,75 dm³
	Kugel:	153 ,94 cm²		Kugel:	179,59 cm³

Textaufgaben

a) Das Seitenlänge beträgt 25,98 cm.

b) Die Grundfläche des Körpers beträgt 60 cm², die Mantelfläche 80,75 dm², die Oberfläche 81,95 dm² und das Volumen 10,2 dm³.

c) Das Becken ist 25 m breit.
Der Wasserstand beträgt 1,8 m.

d) Das Volumen des Körpers beträgt 495000 cm³ (= 495 dm³).